La représentation des fonctions

Alain Yves LE ROUX, Université Bordeaux 1

1 Interpolation de Lagrange

On se donne une fonction f, continue, dont on connait les valeurs $f(x_i)$ en $n+1$ points différents $x_0,\ x_1,\ ...x_n$. On cherche à reconstituer f sur un intervalle contenant les x_i. Sans perdre de généralité, on peut considérer que les points sont ordonnés : $x_i < x_{i+1}$.

Le problème de l'interpolation (c'est à dire sur $[x_0,\ x_n]$) ou de l'extrapolation (c'est à dire hors de $[x_0,\ x_n]$) polynomiale consiste à construire un polynome p de degré minimal, tel que

$$\forall i \in \{0,..,n\} \quad p(x_i) \ = \ f(x_i) \ . \tag{1.1}$$

Théorème 1.1 *Il existe un polynome p de degré n unique, vérifiant (1.1).*

Démonstration : On considère les polynomes de Lagrange :

$$L_j(x) \ = \ \prod_{k\neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \ . \tag{1.2}$$

Ils sont de degré n et vérifient

$$L_j(x) \ = \ \begin{cases} 1 & si \ x = x_j \\ 0 & si \ x = x_i, \ i \neq j \end{cases} \ .$$

On pose ensuite

$$p(x) \ = \ \sum_{j=0}^{n} L_j(x) \ f(x_j) \ \ , \tag{1.3}$$

qui répond bien à la question. Il reste à vérifier l'unicité. Si p_1 et p_2 répondent à la question, $q = p_1 - p_2$ est un polynome de degré n qui admet $n+1$ racines distinctes (à savoir $x_0,\ x_1, ...x_n$) ; il est donc nul, d'où l'unicité.□

Un cas particulier important. On suppose les x_i équidistants (on note $h = x_{i+1} - x_i$). On a alors $x_j - x_k \ = \ (j-k)h$, et

$$\prod_{k\neq j} (x_j - x_k) \ = \ h^n \prod_{k\neq j} (j-k) \ .$$

Il vient

$$\prod_{k\neq j} (j-k) \ = \ (-1)^{n-j} \ j! \ (n-j)! \ .$$

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

On obtient donc dans ce cas

$$L_j(x) \;=\; \frac{(-1)^{n-j}}{h^n\, j!\,(n-j)!} \prod_{k\neq j} (x-x_k) \;\; . \tag{1.4}$$

Calcul par les différences finies : (appelées finies par opposition à infinitésimales). On pose

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h)-f(x) \\ \Delta^2 f(x) &= \Delta^1 f(x+h)-\Delta^1 f(x) \\ &\;\; etc.... \\ \Delta^n f(x) &= \Delta^1(\Delta^{n-1} f(x)) \end{aligned}$$

On adopte en général la présentationsuivante des claculs (ici pour $n=5$

$$\begin{array}{cccccccc} x_0 & f(x_0) & \Delta f(x_0) & \Delta^2 f(x_0) & \Delta^3 f(x_0) & \Delta^4 f(x_0) & \Delta^5 f(x_0) \\ x_1 & f(x_1) & \Delta f(x_1) & \Delta^2 f(x_1) & \Delta^3 f(x_1) & \Delta^4 f(x_1) & . \\ x_2 & f(x_2) & \Delta f(x_2) & \Delta^2 f(x_2) & \Delta^3 f(x_2) & . & . \\ x_3 & f(x_3) & \Delta f(x_3) & \Delta^2 f(x_3) & . & . & . \\ x_4 & f(x_4) & \Delta f(x_4) & . & . & . & . \\ x_5 & f(x_5) & . & . & . & . & . \end{array}$$

qui se généralise trivialement à n quelconque : chaque élément est construit à partir de ses précédents sur sa ligne et sur la ligne au dessous.
On pose ensuite

$$\xi \;=\; \frac{x-x_0}{h} \quad ; \quad \binom{\xi}{k} \;=\; \frac{\xi(\xi-1)...(\xi-k+1)}{k!} \quad ; \quad \binom{\xi}{0} \;=\; 1 \;\; ;$$

cette dernière expression généra lise le nombre de combinaison.

Théorème 1.2 *Le polynome p est donné par la formule de Gregory-Newton :*

$$p(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{\xi}{k} \Delta^k f(x_0) \;\; . \tag{1.5}$$

Démonstration On note T l'opérateur de translation défini par

$$(Tg)(x) \;=\; g(x+h) \;\; .$$

Alors $T = \Delta \; + \; I_d$ et

$$T^k \;=\; \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j \quad .$$

Or $(T^k g)(x) = g(x+kh)$. Donc

$$f(x+kh) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j f(x) \;\; .$$

On fait maintenant $x = x_0$ (donc $f(x+kh) = f(x)$ et $\xi = k$), et il vient

$$f(x_k) \ = \ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j f(x_0) \ = \ \sum_{j=0}^{n} \binom{\xi}{j} \Delta^j f(x_0) \ = \ p(x_k) \ \ .$$

En effet, pour $j > k$, on a $\binom{k}{j} = \dfrac{k(k-1)..(k-j+1)}{j!} = 0$, car un terme nul apparait alors dans le produit, au numérateur.□

On propose maintenant une **estimation d'erreur** :

Théorème 1.3 *On conserve le cas équidistant $x_{i+1} - x_i = h$. Soit I un intervalle contenant les x_i ; on suppose $f \in C^{n+1}(I)$ et on pose $M_{n+1}(f) = \mathrm{Sup}_{\xi \in I} |f^{(n+1)}(\xi)|$. Alors*

$$\forall x \in [x_0, x_n] \quad |f(x) - p(x)| \ \leq \ \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \, M_{n+1}(f) \ \ .$$

Démonstration On commence par généraliser la formule de Taylor de façon à écrire

$$\exists c \in]x_0, x_1[\qquad f(x) - p(x) \ = \ \frac{1}{(n+1)!} \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right) f^{(n+1)}(c) \ . \tag{1.6}$$

Pour cela, on pose

$$q(x) \ = \ \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)} \qquad \textit{si } x \ \notin \ \{x_0, x_1, ...x_n) \quad ,$$

$$q(x_i) \ = \ \frac{f'(x_i) - p'(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \qquad \textit{si } x_i \ \in \ \{x_0, \ x_1, \ ...x_n\} \ .$$

Pour x fixé, différent de chaque x_i, on pose

$$\Phi(z) \ = \ f(z) \ - \ p(z) \ - \ q(x) \prod_{j=0}^{n} (z - x_j) \ \ .$$

On vérifie que $\Phi(z)$ admet $n+2$ racines : $x_0, \ x_1, \ \dots \ x_n$ et x, et est dérivable $n+1$ fois, avec $\Phi^{(n+1)}$ continue sur I. Ainsi sa dérivée s'annule en au moins $(n+1)$ pionts. La dérivée seconde Φ'' s'annule donc en au moins n points, etc... On pârvient ainsi à la dérivée d'ordre $n+1$, $\Phi^{(n+1)}$ qui s'annule en au moins un point, noté c. Ainsi $\Phi^{(n+1)}(c) = 0$. Or

$$\Phi^{(n+1)}(z) \ = \ f^{(n+1)}(z) \ - \ (n+1)! \, q(x) \ \ ,$$

En effet, la dérivée d'ordre $n+1$ de p (de degré n) est nulle. On obtient ainsi (1.6), pour $x \notin \{x_0, x_1, ..x_n\}$, et elle est trivialement satisfaite pour $x = x_i$.
On a donc

$$|f(x) - p(x)| \ \leq \ \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \ \ .$$

Soit k tel que $x_k < x < x_{k+1}$ On a nécessairement $k \leq n-1$. Alors

$$\prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \ = \ \left(\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)\right) (x - x_k)(x_{k+1} - x) \left(\prod_{j=k+2}^{n} (x_j - x)\right) \ ,$$

D'où

$$\prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \ \leq \ \frac{(k+1)!\,(n-k)!}{4} \ h^{n+1} \ \leq \ \frac{(n+1)!}{4\binom{n+1}{k+1}} \, h^{n+1} \ .$$

Or $1 \leq k+1 \leq n$ donc

$$\binom{n+1}{k+1} \ \geq \ n+1 \ .$$

Il reste

$$|f(x) - p(x)| \ \leq \ \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} \ h^{n+1} \ ,$$

d'où le résultat.□

Remarque : Si n est grand, x hors de $[x_0, x_n]$, l'erreur peut devenir très grande. L'erreur d'interpolation est mieux controlée quand on fait de l'interpolation locale.

2 Approximation par interpolation locale.

Soit $[a,b]$ un intervalle réel, fermé et borné. pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $h = \dfrac{b-a}{N}$ puis $a_i = a + ih$ $(0 \leq i \leq n)$. Sur chaque élément $[a_i, a_{i+1}]$ on construit un polynome d'interpolation $p_i(x)$ de degré n pour une fonction $f \in C^{n+1}([A,B])$ donnée aux points $a_i + \dfrac{kh}{n}$, $O \leq k \leq n$. On pose

$$q_h(x) \ = \ p_i(x) \quad si \ \ a_i \leq x < a_{i+1} \ .$$

Théorème 2.1 *Si $f \in C^{n+1}([a,b])$, et $M_{n+1}\big(f\big) = \mathrm{Sup}_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$, on a*

$$\forall x \ \in \ [a,b] \ , \quad |f(x) - q_h(x)| \ \leq \ \frac{M_{n+1}(f)}{4(n+1)} \left(\frac{h}{n}\right)^{n+1} \ . \tag{2.1}$$

Démonstration. Soit $x \in [a,b]$. Il existe $j \in \{0, 1, .., n-1\}$ tel que $a_j \leq x \leq a_{j+1}$. D'après le résultat précédent,

$$|f(x) - q_h(x)| \ \leq \ \frac{M_{n+1}(f)}{4(n+1)} \left(\frac{h}{n}\right)^{n+1} \ ,$$

et il suffit de remarquer que ce majorant est indépendant de j.□

Remarque : On en déduit la convergence uniforme de q_h vers f lorsque h tend vers zéro. On constate que dans ce cas N tend vers l'infini, mais que n (degré du polynome) reste fixe.

En pratique, (on l'a vu lors de l'intégration numérique) on peut prendre des valeurs de n relativement réduites (quelques unités) tout en assurant la qualiuté de l'approximation en prenant N

grand. Cete construction correspond à l'interpolation de Lagrange. Remarquons que q_h est continu mais n'est pas de classe C^1.

Interpolation d'Hermite. On cherche à réaliser une interpolation locale qui soit de classe C^1. On reprend les notations précédentes pour les points a_j et les polynomes associés p_j qui seront ici de degré ≤ 3. On suppose $f \in C^4([a,b])$. Au lieu de choisir quatre points équidistants dans $[a_j, a_{j+1}]$, on construit p_j de la façon suivante.
On veut que p_j réalise

$$p_j(a_j) \ = \ f(a_j) \quad ; \quad p_j(a_{j+1}) \ = \ f(a_{j+1}) \quad ,$$

et

$$p'(a_j) \ = \ f'(a_j) \quad ; \quad p'(a_{j+1}) \ = \ f'(a_{j+1}) \quad .$$

Pour construire ce polynome, on se ramène à $[0,1]$, en posant $t = \dfrac{x-a_j}{h}$. On construit d'abord quatre polynomes λ_0, μ_0, λ_1, μ_1 tels que

$$\begin{array}{llll}
\lambda_0(0) = 1, & \lambda_0(1) = 0, & \lambda_0'(0) = 0, & \lambda_0'(1) = 0 \ , \\
\lambda 1(0) = 0, & \lambda_1(1) = 1, & \lambda_1'(0) = 0, & \lambda_1'(1) = 0 \ , \\
\mu_0(0) = 0, & \mu_0(1) = 0, & \mu_0'(0) = 1, & \mu_0'(1) = 0 \ , \\
\mu_1(0) = 0, & \mu_1(1) = 0, & \mu_1'(0) = 0, & \mu_1'(1) = 1 \ .
\end{array}$$

On obtient succèssivement :

$$\lambda_0(t) \ = \ 1 \ - 3t^2 \ + \ 2\ t^3$$

puis

$$\lambda_1(t) \ = \ \lambda_0(1-t) \ = \ 3t^2 \ - \ 2t^3 \, .$$

et

$$\mu_0(t) \ = \ t\,(t-1)^2, \qquad \mu_1(t) \ = \ -\mu_0(1-t) \ = \ t^2(t-1) \quad .$$

Revenons au polynome p_j. Il est de la forme

$$p_j(x) = f(a_j)\lambda_0(\frac{x-a_j}{h}) + f(a_{j+1})\lambda_1(\frac{x-a_j}{h}) + \ hf'(a_j)\mu_0(\frac{x-a_j}{h}) + hf'(a_{j+1})\mu_1(\frac{x-a_j}{h}),$$

et on vérifie immédiatement qu'on assure les propriétés requises.□

Proposition 2.2 *On a* $q_h(x) \ \in \ C^1([a,b])$.

Démonstration : Le résultat est évident sur chaque petit intervalle $]a_j, a_{j+1}[$. De plus q_h est continue aux noeuds a_j, ainsi que sa dérivée. □

Remarque : Sur un élément $[a_j, a_{j+1}]$, on peut envisager l'interpolation d'Hermite de degré $2n-1$, en utilisant les valeurs de la fonction et de sa dérivée en n points. Les estimations d'erreur sont comparables au cas de Lagrange ; il suffit de remarquer que q_h' interpole f' aux noeuds.

3 Lissage par les fonctions splines

La fonction q_h construite à partir de l'interpolation d'Hermite est de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$, lui même decoupe en N intervalles (éléments) égaux de longueur $h = \frac{b-a}{N}$; on utilise des polynomes de degré ≤ 3 sur chaque élément, soit $4N$ paramètres. Ces paramètres sont complètement déterminés par les deux valeurs imposées $f(a_j)$ et $f'(a_j)$, à chaque extrémité a_j d'élément.degrés de liberté.

On se propose ici de construire un polynome d'interpolation de type Lagrane (on interpole la fonction et pas sa dérivée) qui soit de régularité maximale, donc au moins de classe C^1.

Sur les $4N$ paramètres disponibles, $N+1$ sont fixés par les valeurs d'interpolation et $N-1$ par la contrainte de continuité aux noeuds. Pour atteindre la classe C^1 on exige la continuité de la dérivée, soit encore $N-1$ conditions. On a ainsi fixé $3N-1$ paramètres ; il reste donc encore $N+1$ conditions à imposer. On choisit d'imposer la continuité de la dérivée seconde ($N-1$ paramètres) et que cette dérivée souit nulle aux extrémités a et b de l'intervalle. On construit ainsi une spline cubique.

De façon plus générale, soit k un entier (en pratique $k << N$) et $N+1$ points $a_0 = a \; < \; a_1 \; < \; a_2 \; < \; ... \; < \; a_N = b$. On veut construire une fonction σ_N définie sur $[a, b]$ et telle que :

1 ° - *σ_N coïncide avec un polynome de degré $\leq 2k-1$ sur chaque élément* $[a_j, a_{j+1}]$, soit $2kN$ paramètres.

2 ° - *la dérivée $\sigma_N^{(2k-2)}$ existe et est continue sur* $[a, b]$, soit $(N-1)(2k-1)$ conditions.

3 ° - *les dérivées d'ordre k à $2k-2$ sont nulles en a et b*, soit encore $2(k-1)$ nouvelles conditions.

4 ° - *σ_N interpole une fonction donnée f aux points a_j*, soit encore $N+1$ conditions.

On impose ainsi
$$(N-1)(2k-1) \; + \; 2(k-1) \; + \; N+1 \; = \; 2kN$$
conditions, soit autant que de paramètres à déterminer.

Théorème 3.1 *Soit k un entier inférieur à N. Il existe une fonction σ_N unique telle que les quatre conditions précédentes soient satisfaites*

On utilisera le lemme suivant, qui sera démontré ensuite.

Lemme 3.2 *Soit*
$$\sigma \in \Phi_k \; = \; \left\{ v \in C^{2k-2} \mid v|_{]a_j, a_{j+1}[} \in P_{k-1}, \; \sigma^{(j)}(a) = \sigma^{(j)}(b) = 0, k \leq j \leq 2k-2 \right\}$$
Soit $f \in C^k([a, b])$ telle que $f(a_j) = \sigma(a_j), \; 0 \leq j \leq N$. Alors
$$\int_a^b \sigma^{(k)}(x) \left(\sigma^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right) dx \; = \; 0 \quad . \tag{3.1}$$

Démonstration du Théorème. On construit la fonction σ_N. On pose, pour une expression réelle donnée E, $E_+ = \max(E,0)$ Alors $(E_+)^{2p+1} = (E^{2p+1})_+$ pour tout entier p. On considère les fonctions Φ_j, $j = 0,..N-1$, définies par

$$\Phi_j(x) = (x - a_j)_+^{2k-1}$$

Elles sont de classe $C^{2k-2}([a,b])$ et chaque Φ_j est nulle en a_j ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $2k-2$ inclus. De plus elle est identiquement nulle sur $[a, a_j]$.
Soit p_{k-1} un polynome de degré $k-1$. On construit σ_N sous la forme suivante

$$\sigma_N(x) = p_{k-1}(x) + \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \, \Phi_j(x) \; . \tag{3.2}$$

Il reste à déterminer les coefficients α_i de p_{k-1} et les λ_j, soit $k+N$ paramètres. pour cela, on dispose des équations

$$\begin{aligned} \sigma_N(a_j) &= f(a_j) \qquad (N+1 \text{ équations}) \\ \sigma_N^{(j)}(b) &= 0 \qquad \text{pour } k \leq j \leq 2k-2 \;\; (k-1 \text{ équations}) \end{aligned}$$

et ces équations constituent un système linéaire. En effet, pour $i = 0,..N$, puis $j = k,..2k-2$,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{m=0}^{k-1} \alpha_m \, a_i^m + \sum_{m\leq i} \lambda_m (a_i - a_m)_+^{2k-1} &= f(a_i) \\ \textstyle\sum_{m=0}^{N} \lambda_m \, (2k-1)...(2k-j) \, (b - a_m)^{2k-j-1} &= 0 \end{aligned}$$

Ce système admet une solution unique si et seulement si le système homogène d'admet que la solution nulle. Notons α_i^* et λ_j^* les paramètres correspondant à une solution du problème homogène, associés à la fonction σ_N^*. On applique le lemme en prenant $f = 0$. Il vient

$$\int_a^b \, |\sigma_N^{*(k)}(x)|^2 \, dx = 0 \; .$$

Donc $\forall x \in [a,b]$, $\sigma_N^{*(k)}(x) = 0$, et σ_N^* est un polynome de degré au plus égal à $k-1$, ayant $N+1$ $(> k)$ racines, donc σ_N^* est nul, et l'existence et l'unicité de σ_N.$\square$

Démonstration du Lemme. On pose $r = f - \sigma$ et on calcule

$$I = \int_a^b \sigma^{(k)}(x) \, r^{(k)}(x) \, dx$$

par parties. Il vient succèssivement

$$I = [\sigma^{(k)}(x) \, r^{(k-1)}(x)]_a^b - \int_a^b \sigma^{(k+1)}(x) \, r^{(k-1)}(x) \, dx \; ,$$

qu'on intègre de nouveau par parties, pour obtenir

$$I = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j [\sigma^{(k+j)}(x) r^{(k-j-1)}(x)]_a^b + (-1)^{k-1} \int_a^b \sigma^{(2k-1)}(x) \, r'(x) \, dx$$

Or

$$\sigma^{(k+j)}(a) = \sigma^{(k+j)}(b) = 0$$

pour $j = 0, 1..k-2$ et $\sigma^{(2k-1)}$ est constant (noté c_j) sur chaque élément $[a_j, a_{j+1}]$. On a donc

$$I \;=\; (-1)^{k-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} r'(x)\, dx \;=\; \sum_{j=0}^{N-1} c_j \left(r(a_{j+1}) - r(a_j)\right) \;=\; 0$$

sachant que $\forall j \;\; r(a_j) \;=\; 0.\square$

Définition La fonction σ_N ainsi construite est appelée *spline d'ordre k* associée à la fonction f sur les points $a_j, j = 0, 1..N$.

Remarque : pour $k = 2$ on retrouve la spline dite "cubique", et qui est en fait d'ordre 2.

Propriétés des splines.

Théorème 3.3 *Soit $f \in C^k([a,b])$ et σ_N la spline d'ordre k construite à partir des $ydi = f(a_i)$. Alors*

$$\int_a^b \left|\sigma^{(k)}(x)\right|^2 dx \;\leq\; \int_a^b \left|f^{(k)}(x)\right|^2 dx \quad . \tag{3.3}$$

Démonstration On reprend le lemme pour évaluer

$$\int_a^b (\left|f^{(k)}\right|^2 - \left|\sigma^{(k)}\right|^2) dx \;=\; \int_a^b (\left|f^{(k)}\right|^2 - \left|\sigma^{(k)}\right|^2 + 2\sigma^{(k)}(\sigma^{(k)} - f^{(k)})) dx$$

$$= \int_a^b (\left|f^{(k)}\right| \;-\; \left|\sigma^{(k)}\right|)^2 dx \;\geq\; 0 \;\; .\square$$

remarque : Dans la construction de la spline, on n'utilise que les données a_i et $y_i = f(a_i)$; ainsi ce résultat est vrai pour toutes les fonctions f vérifiant $f(a_i = y_i$. On peut donc considérer que dans cette classe de fonctions, σ_N est celle qui minimise le terme

$$\int_a^b \left|f^{(k)}(x)\right|^2 dx \; .$$

Pour $k = 2$, ce terme peut etre assimilé à une courbure. Ainsi, la spline σ_N est le meilleur interpolant minimisant le carré de la courbure. Il y a en effet unicité : si f vérifie $f^{(k)} = \sigma^{(k)}$, on a $f = \sigma + p_{k-1}$, où p_{k-1} est un polynome de degré $\leq k-1$ et ayant $N+1$ racines, avec $N > k$. donc $p_{k-1} \equiv 0$.

Calcul numérique de la spline cubique ($k = 2$)**.** Sur chaque élément $]a_{i-1}, a_i[$, σ est un polynome de degré ≤ 3, qu'on note p_i. On peut donc écrire, sachant que σ'' est une fonction continue,

$$\sigma''|_{]a_{i-1},a_i[} \;=\; pi''(x) \;=\; M_i \frac{x - a_{i-1}}{h_i} + M_{i-1} \frac{a_i - x}{h_i} \quad .$$

En intétgrant deux fois, il vient

$$p_i(x) \;=\; M_i \frac{(x - a_{i-1})^3}{6h_i} \;+\; M_{i-1} \frac{(a_i - x)^3}{6h_i} \;+\; C_i\,(a_{i-1} - x) \;+\; D_i(a_i - x) \tag{3.4}$$

On se place en a_{i-1} et en a_i, pour obtenir les deux équations

$$M_{i-1}\,\frac{h_i^2}{6} \;+\; D_i\,h_i \;=\; f(a_{i-1}) \;\;, \tag{3.5}$$

$$M_i\,\frac{h_i^2}{6} \;-\; C_i\,h_i \;=\; f(a_i) \;\;. \tag{3.6}$$

On onteint donc, en remplaçant les C_i et les D_i,

$$p_i(x) = M_i\frac{(x-a_{i-1})^3}{6h_i} + M_{i-1}\frac{(a_i-x)^3}{6h_i} + \frac{x-a_{i-1}}{h_i}(f(a_i) - M_i\frac{h_i^2}{6}) + \frac{a_i-x}{h_i}(f(a_{i-1}) - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6})$$

On écrit maintenant la continuité de la dérivée de σ αux noeuds a_j :

$$p_i'(a_i) \;=\; p_{i+1}'(a_i)$$

et il vient N équations

$$M_{i-1}\frac{h_i}{6} \;+\; M_i\,\frac{h_i+h_{i+1}}{3} \;+\; M_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} \;=\; \frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{h_{i+1}} \;-\; \frac{f(a_i)-f(a_{i-1})}{h_i} \tag{3.7}$$

Il s'agit d'un systéme linéaire tridiagonal symétrique. On a dans un premier temps $M_0 = M_N = 0$ (3° condition), puis les M_i en résolvant (3.7). On obtient ensuite les D_i par (3.5) et les C_i par (3.6).□

4 Notions sur les approximants de Padé.

On connait l'approximation d'une fonction par les développements limités, qui sont des séries de taylor tronquées, et on en connait les inconvénients : intervalle de convergence limité et convergence plutot lente dans certains cas. Cependant, à partir de cette donnée algébrique, on peut fabriquer une approximation de bien meilleure qualité, par des fractions rationnelles.

Prenons un exemple :

$$f(x) \;=\; \frac{\ln(1+x)}{x} \;=\; 1 \;-\; \frac{x}{2} \;+\; \frac{x^2}{3} \;-\; \frac{x^3}{4} \;+\; \frac{x^4}{5} \;-\; ... \;+\; (-1)^n\frac{x^n}{n+1} \;+\; ..$$

et dont le rayon de convergence est 1. On chercxhe une fraction rationnelle de la forme

$$Q(x) \;=\; \frac{a+bx+cx^2}{1+\lambda x+\mu x^2}$$

qui approche $f(x)$ jusqu'à l'ordre 4 inclus, c'est à dire

$$\frac{a+bx+cx^2}{1+\lambda x+\mu x^2} \;=\; 1 \;-\; \frac{x}{2} \;+\; \frac{x^2}{3} \;-\; \frac{x^3}{4} \;+\; \frac{x^4}{5} \;+\; x^4\,\epsilon_1(x)$$

En identifiant, on obtient un système de 5 équations :

$$\frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{2} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{\lambda}{4} - \frac{\mu}{3} = \frac{1}{5} \ ,$$

$$a = 1 \ , \ b = -\frac{1}{2} + \lambda \ , \ c = \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{2} + \mu \ .$$

On en déduit :

$$a = 1 \ , \lambda = \frac{6}{5} \ , \ \mu = \frac{3}{10} \ , \ b = \frac{7}{10} \ , \ c = \frac{1}{30} \ ,$$

et

$$Q(x) = \frac{1 + \frac{7}{10}x + \frac{1}{30}x^2}{1 + \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}x^2} \quad .$$

On observe que tous les coefficients sont ici positifs, ce qui n'était pas le cas de la série entière ; prenons par exemple $x = 2$, ce qui est largement en dehors de l'intervalle de convergence de la série. On obtient

$$\begin{array}{r} \textit{valeur exacte :} \quad f(2) = \frac{\ln(3)}{2} \approx 0.549306 \\ \textit{par la série :} \quad S(2) = \frac{38}{15} \approx 2.5333333 \\ \textit{par l'approximant de Padé } Q(2) = \frac{38}{69} \approx 0.55072 \ . \end{array}$$

L'approximation par $Q(2)$ est restée bonne, bien qur $x = 2$ soit en dehors de l'intervalle de convergence de la série.

Dans le cas général, un approximant de Padé est de la forme

$$P_M^N(x) = \frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_N x^N}{1 + B_1 x + \ldots + B_M x^M} \quad , \tag{4.1}$$

et si on l'utilise pour approcher un polynome q de degré $N + M$, on écrit

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_N x^N \approx Q(x)\,(1 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_M x^M)$$

En identifiant les coéfficients de degré $N + 1$ à $N + M$, on obtient, en notant $B_0 = 1$,

$$\forall m \geq N+1 \quad \sum_{k+i=m} a_k\, B_i = 0$$

d'où le système linéaire

$$\forall m \geq N+1 \quad \sum_{k+i=m, i\geq 1} a_k\, B_i = -\, a_m \ .$$

Une fois obtenus les B_j, le calcul des A_k est immédiat (il est explicite).

En pratique, on utilise surtout les approximants P_N^N et P_{N+1}^N car on peut établir les inégalités

$$P_1^0 \leq P_2^1 \leq \ldots \leq P_{N+1}^N \leq \ \ldots.. \leq P_N^N \leq P_{N-1}^{N-1} \leq \ldots \leq P_1^1 \leq P_0^0 \ .$$

Ainsi, la suite P_N^N est décroissante et bornée, et la suite P_{N+1}^N est croissante et bornée. On peut donc établir la convergence pour chacune des suites et en déduire

$$\forall \mathrm{x} \quad \lim_{\mathrm{N}\longrightarrow\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{N+1}}^{\mathrm{N}}(\mathrm{x}) \ \leq \lim_{\mathrm{N}\longrightarrow\infty} \mathrm{P}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N}}(\mathrm{x}).$$

Il n'y a pas égalité en général, bien qu'elle soit observée dans tous les cas pratiques. Les contre exemples connus sont très académiques. Notons que P_N^N et P_{N+1}^N restent bornés en $\pm\infty$.

5 Représentation géométrique : techniques de CAO

dans l'industrie (automobile, aéronautique, design, cinéma,..),on utilise des courbes pour le dessin, dont on veut disposer d'une représentation paramétrique dès la conception. De plus, il est avantageux que cette courbe fasse intervenir un minimum de paramètres, et que ces paramètres servent ensuite de contrôle pour des modifications éventuelles de la courbe.

On rappelle la définition d'un polynome de Bernstein sur $[0,1]$

$$B_k^n(t) \ = \ \binom{n}{k}\, t^k\,(1-t)^{n-k}, \quad \textit{pour}\ 0 \leq k \leq n \ . \tag{5.1}$$

On convient de poser $B_k^n(t)=0$ pour $k<0$ ou $k>n$.

Proposition 5.1 *Les polynomes* $B_k^n,_{k=0,..n}$ *constituent une base de* $\mathbb{P}_n$*, espace des polynomes de degré* $\leq n$*. Ils vérifient les propiétés de*

positivité : $\forall t \in [0,1],\ \forall k \in \{O,..,n\} \quad B_k^n(t) \ \geq \ 0$,

symétrie : $B_k^n(t) \ = \ B_{n-k}^n(1-t)$,

et le polynome B_k^n *est maximal sur* $[0,1]$ *au point* $t=\frac{k}{n}$.

Démonstration Il suffit de démontrer l'indépendance linéaire.
Soit $\lambda_0,\ \lambda_1,\dots\ \lambda_n$ tels que

$$\forall t \in [0,1] \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \binom{n}{k}\, t^k\,(1-t)^{n-k} \ = \ 0 \ .$$

On fait $t=1$ et il vient $\lambda_n=0$. Donc $t=1$ est racine. On divise par $(1-t)$, et il vient

$$\forall t \in [0,1] \ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \binom{n}{k}\, t^k\,(1-t)^{n-1-k} \ = \ 0 \ .$$

On fait encore $t=1$, et il vient $\lambda_{n-1}=0$. Ainsi, de proche en proche, on obtient ensuite $\lambda_{n-2} = \dots = \lambda_1 = \lambda_0$, et les B_k^n constituent bien une base.

La positivité est immédiate.

Pour la symétrie, on calcule

$$B_{n-k}^n(1-t) \ = \ \binom{n}{n-k}(1-t)^{n-k}(1-1+t)^k \ = \ B_k^n(t) \ ,$$

car

$$\binom{n}{n-k} \ = \ \binom{n}{k} \ .$$

Il reste à dériver pour évaluer la maximum. de façon évidente, il n'y a pas de maximum dans $]0,1[$ pour $k=0$ ou pour $k=n$. Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$\frac{d}{dt}\, B_k^n(t) \;=\; \binom{n}{k}\,(1-t)^{n-k-1}t^{k-1}\,(k(1-t)-(n-k)t)$$

qui vaut zéro lorsque $(n-k)t = k(1-t)$, soit $t=\frac{k}{n}$. La positivité implique qu'il s'agit d'un maximum. Pour $k=0$, on a

$$B_0^n(t) \;=\; (1-t)^n$$

qui atteint son maximum en $t=0=\frac{k}{n}$, et pour $k=n$

$$B_n^n(t) \;=\; t^n \;,$$

qui atteint son maximum en $t=1=\frac{k}{n}$. □

Proposition 5.2 *On a les relations de recurrence :*

$$B_k^n(t) \;=\; (1-t)\,B_k^{n-1}(t) \;+\; t\,B_{k-1}^{n-1}(t) \quad , \tag{5.2}$$

$$\frac{d}{dt}\,B_k^n(t) \;=\; n\;(\;B_{k-1}^{n-1}(t) \;-\; B_k^{n-1}(t)\;) \tag{5.3}$$

Démonstration. On calcule, pour $0<k<n$, $(1-t)B_k^{n-1}(t)+tB_{k-1}^{n-1}(t)$ pour trouver

$$\binom{n-1}{k}(1-t)^{n-1-k+1}t^k \;+\; \binom{n-1}{k-1}(1-t)^{n-1-k+1}t^{k-1+1} \;=\; B_k^n(t),$$

car

$$\binom{n-1}{k} \;+\; \binom{n-1}{k-1} \;=\; \binom{n}{k} \;.$$

En dérivant, on a

$$\frac{d}{dt}\, B_k^n(t) \;=\; \binom{n}{k}\,(1-t)^{n-k-1}t^{k-1}\,(k(1-t)-(n-k)t)$$

$$=\; n\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,(1-t)^{n-k}t^{k-1} - \;\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}\,(1-t)^{n-k-1}t^k\right)$$

d'où le résultat pour $0<k<n$.
Pour $k=0$, on a

$$B_0^n(t) \;=\; (1-t)(1-t)^{n-1} \;=\; (1-t)\;B_0^{n-1}(t)$$

et

$$\frac{d}{dt}\,B_0^n(t) \;=\; -n(1-t)^{n-1} = -n\;B_0^{n-1}(t)$$

Pour $k=n$, on a de même

$$B_n^n(t) \;=\; t\,t^{n-1} \;=\; t\;B_n^n(t) \;\;;\;\; \frac{d}{dt}B_n^n(t) \;=\; n\;t^{n-1} \;=\; B_{n-1}^{n-1}(t) \;\;.□$$

Définition 5.3 *On se donne un ensemble $\mathbb{P}$ de $n+1$ points $\mathbb{P} = \{P_0, .., P_n\}$ dans un espace de dimension $d \geq 2$, et on lui associe la courbe de Bézier polynomiale*

$$B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t)\; P_k \quad , \; 0 \leq t \leq 1 \;\; . \tag{5.4}$$

L'ensemble $\mathbb{P}$ est appelé polygone de contrôle, ou polygone de Bézier, et n son nombre de cotés est appelé "longueur de la courbe".

Exemples

Pour $n = 1$, il n'y a que deux popints, et $B_{\mathbb{P}}(t) = (1-t)P_0 + tP_1$. Il s'agit du segment de droite reliant P_0 à P_1.

Pour $n = 2$, on a

$$B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; (1-t)^2\, P_0 \;+\; 2t(1-t)\; P_1 \;+\; t^2\, P_2 \;,$$

et pour $t = 0$, on se retrouve au point P_0, pout $t = 1$ au point P_2. Cependant, la position de P_1 influe sur la convexité de la courbe, sans que la courbe passe par P_1. Par exemple, en éloignant le point P_1, on renforce cette courbe, en attirant la courbe vers P_1.

Pour $n \geq 3$, on obtient des situations plus complexes. La courbe a pour extrémités P_0 et P_n. Les points de contrôle $P_1, .., P_{n-1}$ agissent comme des aimants vis à vis de la courbe, sans être des points d'interpolation.

On peut aisément établir que la courbe de Bézier est tangente en P_0 au segment P_0P_1, et en P_n au segment P_nP_{n-1}.

Quelques propriétés.

1- Pour t fixé, $B_{\mathbb{P}}(t)$ est le barycentre des points P_i affectés des poids respectifs $B_i^n(t)$. Ainsi, le point $B_{\mathbb{P}}(t)$ est toujours situé dans l'enveloppe convexe du polygone de contrôle.

2- Une propriété de symétrie : on note $\mathbb{Q} \;=\; \{P_n, P_{n-1}, .., P_1, P_0\}$. On a

$$B_{\mathbb{P}}(1-t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} B_k^n(1-t)P_k \;=\; \sum_{k=0}^{n} B_{n-k}^n(t)P_k \;=$$

$$= \sum_{j=0}^{n} B_j^n(t)\; P_{n-j} \;=\; B_{\mathbb{Q}}(t) \;\; .$$

3- Dérivabilité : On a

$$D^j\; B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=0}^{n-j} B_k^{n-j}(t)\; \Delta^j P_k \;\; , \tag{5.5}$$

où $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$ (il s'agit d'un vecteur), qu'on itère pour construire Δ^j, l'opérateur classique de différences finies : $\Delta^j P_k \;=\; \Delta^{j-1}P_{k+1} \;-\; \Delta^{j-1}P_k$.

Cette formule (5.5) est immédiate pour $j = 0$. On l'admet au niveau $j-1$, soit

$$D^{j-1}B_{\mathbb{P}}(t) = \frac{n!}{(n-j+1)!} \sum_{k=0}^{n-j+1} B_k^{n-j+1}(t)\; \Delta^{j-1}P_k \;\; .$$

qu'on dérive en utilisant (5.3). Il vient

$$D^j B_{\mathbb{P}}(t) = \frac{n!}{(n-j+1)!}(n-j+1)\sum_{k=0}^{n-j+1}(B_{k-1}^{n-j}(t) - B_k^{n-j}(t))\Delta^{j-1}P_k$$

$$= \frac{n!}{(n-j)!}\left[\sum_{l=0}^{n-j} B_l^{n-j}(t)\Delta^{j-1}P_{l+1} - \sum_{k=0}^{n-j} B_k^{n-j}(t)\Delta^{j-1}P_k\right]$$

d'où le résultat en remarquant que $\Delta^{j-1}P_{k+1} - \Delta^{j-1}P_k = \Delta^j P_k$.
Remarquons qu'en $t = 0$, on a

$$D^j B_{\mathbb{P}}(0) = \frac{n!}{(n-j)!}\Delta^j P_0 \ ,$$

et en $t = 1$,

$$D^j B_{\mathbb{P}}(1) = \frac{n!}{(n-j)!}\Delta^j P_{n-j} \ .$$

Seuls les $j+1$ points voisins de l'extrémité interviennent.

4- Pour fermer une courbe en atteignant la classe C^k, il faut que

$$\begin{aligned} P_0 &= P_n \\ \Delta P_0 &= \Delta P_{n-1} \\ &\ldots. \\ \Delta^j P_0 &= \Delta^j P_{n-j} \end{aligned}$$

jusqu'à $j = k$.

5- Transformation affine : Une transformation affine $\mathcal{A}$ respecte les barycentres, donc

$$A\{B_{\mathbb{P}}(t)\} = B_{\mathcal{A}\mathbb{P}}(t) \ , \text{ où } \mathcal{A}\mathbb{P} = \{\mathcal{A}P_0, \mathcal{A}P_1, .., \mathcal{A}P_n\}$$

6-Représentation de Bézier d'une courbe polynomiale. On se donne

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^m \\ \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_p t^p \end{pmatrix} \ ,$$

avec par exemple $p \le m$ (on pose alors $\beta_{p+1} = \beta_{p+2} = \ldots = \beta_m = 0$). On a

$$M(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} t + \ldots + \begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p \end{pmatrix} t^p + \ldots \begin{pmatrix} \alpha_m \\ 0 \end{pmatrix} t^m.$$

Par ailleurs,

$$M(t) = M(0) + M'(0)t + \ldots + \frac{t^m}{m!} M^{(m)}(0)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} = \frac{1}{j!} M^{(j)}(0) \ .$$

Dans cette représentation, tout est concentré en $t = 0$, et on va le distribuer sur l'intervalle $[0, 1]$, en utilisant la base de Bernstein. Il nous faut d'abord passer à cette nouvelle base : on considère un polynome

$$p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j \ ,$$

de degrè m, et on cherche les coefficients b_k tels que

$$p(t) \;=\; \sum_{k=0}^{m} b_k \, B_k^n(t) \;\; .$$

Pour cela, on calcule les dérivées à l'origine et on identifie :

$$k! \; a_k \;=\; \frac{m!}{(m-k)!} \, \Delta^k b_0 \;\; , \qquad k = 0, 1, .., n$$

d'où

$$\Delta^k b_0 \;=\; \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}} \, a_k \;\; .$$

On connait donc tous les $\Delta^k b_0$ et il reste à en déduire les b_k. Ceci se fait trivialement en remontant le tableau des différences. On pose

$$\Delta^j b_1 = \Delta^j b_0 + \Delta^{j+1} b_0$$
$$\dots$$
$$\Delta^j b_l = \Delta^j b_{l-1} + \Delta^{j+1} b_{l-1}$$

On sait donc effectuer explicitement la conversion et en déduire des α_j et des β_j les points P_j de la représentation de Bézier, en procédant composante par composante. On peut ensuite modifier la position de ces points P_j pour revenir aux nouvelles valeurs α_j et β_j ainsi obtenues.

L'algorithme de DeCasteljau. Soit $\mathbb{P} = \{P_0, P_1, ... P_n\}$ un polygone de Bézier. Pour tout $t \in [0, 1]$, on définit succèssivement les points $P_i^j(t)$ par

$$P_i^0(t) \;=\; P_i \;\; , \quad \textit{pour} \; 0 \leq i \leq n \;\; ,$$

$$P_i^j(t) \;=\; (1-t) \; P_i^{j-1}(t) \;+\; t \; P_{i+1}^{j-1}(t) \;\; , \quad 0 \leq i \leq n-j. \tag{5.6}$$

Proposition 5.4 *Pour tout* $j \in \{0, 1, .., n\}$,

$$B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; \sum_{i=0}^{n-j} B_i^{n-j}(t) \; P_i^j(t) \;, \tag{5.7}$$

et en particulier, pour $j = n$,

$$B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; P_0^n(t) \;\; . \tag{5.8}$$

Démonstration- Pour $j = 0$, on n'a rien d'autre que la définition de $B_{\mathbb{P}}(t)$. Supposons la formule vraie au niveau $j-1$, c'est à dire

$$B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; \sum_{i=0}^{n-j+1} B_i^{n-j+1}(t) \; P_i^{j-1}(t) \; .$$

En utilisant (5.2), il vient

$$B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; \sum_{i=0}^{n-j+1} (1-t)\; B_i^{n-j}(t) P_i^{j-1}(t) \;+\; t\; B_{i-1}^{n-j}(t)\; P_i^{j-1}(t)$$

que l'on réécrit

$$B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; \sum_{i=0}^{n-j} (1-t) B_i^{n-j} P_i^{j-1}(t) \;+\; \sum_{k=0}^{n-j} t\; B_k^{n-j}(t)\; P_{k+1}^{j-1}(t)$$

et en regroupant de nouveau,

$$B_{\mathbb{P}}(t) \;=\; \sum_{i=0}^{n-j} B_i^{n-j}(t) \left[(1-t)\; P_i^{j-1}(t) \;+\; t\; P_{i+1}^{j-1}(t) \right] ,$$

d'où le résultat en utilisant (5.6). Pour $j = n$, $B_i^{n-j}(t) = B_i^0(t) = 1$, d'où (5.8). $\square$

Définition de l'Algorithme. L'algorithme de DeCasteljau est constitué des étapes suivantes qui aboutissent à l'évaluation de $P_0^n(t) = B_{\mathbb{P}}(t)$:

Initialisation :

Pour $i = 0$ *à* n faire

$$P_i^0(t) \;=\; P_i$$

Cycles de calcul :

Pour $j = 1$ *à* n faire

Pour $i = 0$ *à* $n - j$ faire

$$P_i^j(t) \;=\; (1-t)\; P_i^{j-1}(t) \;+\; t\; P_{i+1}^{j-1}(t) \;\; .$$

Remarque : Une fois calculé $P_i^j(t)$, on n'utilise plus $P_i^{j-1}(t)$; on peut donc utiliser les mêmes positions de mémoire.

L'algorithme peut être étendu au calcul des dérivées :

Initialisation :

Pour $i = 0$ *à* $n - k$ faire

$$\Delta^k P_i^0(t) \;=\; \Delta^k P_i$$

Cycles de calcul :

Pour $j = 1$ *à* $n - k$ faire

Pour $i = 0$ *à* $n - k - j$ faire

$$\Delta^k P_i^j(t) \;=\; (1-t)\, \Delta^k P_i^{j-1}(t) \;+\; t\, \Delta^k P_{i+1}^{j-1}(t) \;\; .$$

On aboutit à

$$\Delta^k P_0^{n-k}(t) \;=\; \frac{(n-k)!}{n!}\; D^k B_{\mathbb{P}}(t) \;\; . \tag{5.9}$$

6 Représentation Spectrale : la transformation de Foirier discrète.

On se donne une fonction f périodique, de période a, et un entier pair N ; on pose

$$\forall\, k \;\in\; \{0,1,\;\; N-1\} \qquad y_k \;=\; f(\frac{ka}{N}) \;\;.$$

On suppose aussi que f est développable en série de Fourier, et qu'elle est égale en tout point à sa série de Fourier, ce qui se traduit par la condition

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \;=\; \frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0)\right) \;\;.$$

On veut approcher les coefficients de Fourier de f

$$\int_0^a g(t)\;dt \;\approx\; \frac{a}{N}\left\{\frac{g(0)}{2}\left\{\frac{g(0)}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{N-1} g(\frac{ka}{N}) \;+\; \frac{g(a)}{2}\,\}\right\}\right.$$

Pour cela, on propose deux méthodes : le calcul approché par la formule des trapèzes et l'interpolation par un polynôme trigonomètrique.

L'intégration approchée par la méthode des trapèzes d'une fonction g périodique, de période a, aboutit à la formule

$$\int_0^a g(t)\;dt \;\approx\; \frac{a}{N}\left\{\frac{g(0)}{2} \;+\; \sum_{k=0}^{N-1} g(\frac{ka}{N}) \;+\; \frac{g(a)}{2}\right\} \;\;.$$

Or $g(0) = g(a)$, donc

$$\int_0^a g(t)\;dt \;\;\approx\;\; \frac{a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g(\frac{ka}{N})\;.$$

On applique cette formule au calcul de l'approximation $\tilde{c}_n$ de c_n. Il vient

$$\tilde{c}_n \;=\; \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} y_k\,\omega_N^{-kn} \tag{6.1}$$

en posant

$$\omega_N \;=\; e^{\frac{2i\pi}{N}} \;\;. \tag{6.2}$$

Pour l'interpolation, on introduit le polynôme trigonométrique de la forme

$$p(t) \;=\; \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} C_n^N\, e^{2i\pi n\frac{t}{a}} \quad ,$$

qui interpole les valeurs y_k aux points $t = \dfrac{ka}{N}$. On aura donc

$$y_k \;=\; \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} C_n^N\;\omega_N^{nk} \;\;. \tag{6.3}$$

Pour évaluer les c_n^N on est amené à résoudre un système linéaire. On commence par ramener la séquence $\{-\frac{N}{2}, ..., \frac{N}{2} - 1\}$ à $\{0, .., N-1\}$, en écrivant

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{-1} c_n^N \, \omega_N^{nk} \; = \; \sum_{j=\frac{N}{2}}^{N-1} C_{j-N}^N \omega_N^{kj} \;\; ,$$

en posant $j = N + n$, et en remarquant que $\omega_N^{kN} = 1$. On pose

$$Y_n \; = \; \begin{cases} c_n^N \quad si \; 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \;\; , \\ c_{n-N}^N si \; \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad ,$$

et on obtient

$$\sum_{n=0}^{N-1} Y_n \, \omega_N^{nk} \; = \; y_k \;\; , \tag{6.4}$$

ce qui est une nouvelle formulation de notre système linéaire, et qu'on résoud maintenant. Soit $p \in \{0, 1, .., N-1\}$; on multiplie par ω_N^{-kp} et on somme (en k)pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_k \, \omega_N^{-pk} \; = \; \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \, \omega_N^{k(n-p)} \; = \; \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \, \delta_{np}$$

car

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(n-p)} \; = \; \delta_{np} \; = \; \begin{cases} N \; si \; n = p \\ 0 \; si \; n \neq p \end{cases} \quad .$$

Il reste effectivement

$$Y_p \; = \; \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \, \omega_N^{-kp} \; .$$

On a retrouvé

$$Y_p \; = \; \tilde{c}_p \; .$$

Ainsi, les deux méthodes sont équivalentes, et on a les deux relations

$$y_k \; = \; \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \, \omega_N^{nk} \;\; ; \quad Y_n \; = \; \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \, \omega_N^{-nk} \quad . \tag{6.5}$$

Définition : La transformation (6.5) qui permet de passer des y_k aux Y_n est appelée Transformation de Fourier discréte, et est notée $\mathcal{F}_{\mathrm{N}}$.

Proposition : La transformation $\mathcal{F}_N$ est une application linéaire bijective de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$.
Démonstration : Soit M_N la matrice des coéfficients ω_N^{nk}. On vérifie immédiatement que

$$\frac{1}{N} \, M_N \, \overline{M}_N \; = \; I_d$$

Donc M_N est inversible, et $M_N^{-1} = \frac{1}{N} \, \overline{M}_N$.□