Université de Montpellier II

Examen
ULMA102 (Biomaths1)
L1 — 1er semestre

Session de janvier 2005 — Durée : 2h

CALCULATRICES ET POLYCOPIÉS DE COURS ET TD
(ÉVENTUELLEMENT SURLIGNÉS MAIS PAS ANNOTÉS) SONT AUTORISÉS

On rappelle que la clarté et la concision des justifications de toute réponse seront fortement prises en compte dans la notation.

Exercice 1 On étudie une usine de construction de voitures qui produit deux modèles : l'un de qualité normale, l'autre de qualite supérieure. Deux tiers des voitures produites sont de qualité normale, le tiers restant est composé de voitures de qualité supérieure. Des études montrent que 1% des voitures de qualité supérieure ont malgré tout un défaut de construction ; pour les voitures de qualité normale, ce chiffre monte à 10%.
Parmi les voitures ayant un défaut de construction, déterminer la probabilité qu'un véhicule soit de qualité supérieure et la probabilité qu'un véhicule soit de qualité normale.

Exercice 2 On considère une population de poissons dans un lac. La croissance naturelle de la population suit la loi suivante : entre deux instants t et $t + \Delta t$, la variation du nombre de poissons est approximativement proportionnelle à Δt et au nombre de poissons présents à l'instant t (cette approximation est d'autant plus vraie que Δt est petit) ; la constante de proportionnalité (correspondant au taux de croissance par unité de temps), dépend du temps et sera notée $k(t)$.
Par ailleurs, la pêche des poissons a l'effet suivant : entre deux instants t et $t+\Delta t$, le nombre de poissons pêchés est proportionnel à Δt : on notera Q la constante de proportionnalité correspondante.

i) Montrer que la population $N(t)$ de poissons vérifie l'équation différentielle $N'(t) = k(t)N(t) - Q$.

ii) On donne $k(t) = -\frac{1}{1+t}$. Calculer $N(t)$ en fonction de Q et N_0 (la population initiale de poissons) ; étudier et tracer $N(t)$; commenter.

Exercice 3 On considère un modèle de croissance logistique avec la capacité biotique du milieu égale à un. L'équation considérée est donc : $y'(t) = ry(t)(1 - y(t))$ (r est constant positif).
On suppose $y(0) = 1/2$. Calculer $y(t)$ et commenter *(on pourra constater que* $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$*)*.

Exercice 4 i) Parmi les trois graphes de la figure 1, lequel est celui de $f(x, y) = x^3 + y^2$ (on vous demande de justifier votre choix) ?

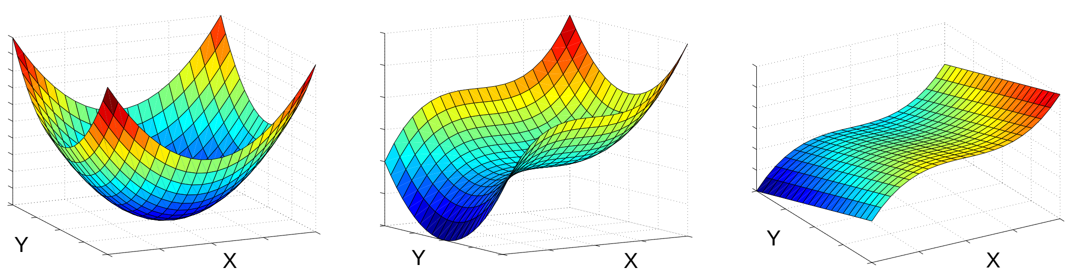

Figure 1: graphes A, B, C

ii) Soit $u(t) = t^3$, $v(t) = \sin(t)$ et $f(x, y) = e^x \cos(y) + x^2$. Calculer les dérivées partielles de f, puis la dérivée de $w(t) = f(u(t), v(t))$.