Examen de DEA,
“Solutions variationnelles”

22 avril 2004, 14h-16h, tous documents manuscripts autorisés.

Exercice 1 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1, \infty[$. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$ et u une solution faible de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

i) Montrer que si $f \geq 0$ sur Ω, alors $u \geq 0$ sur Ω.

ii) Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$.

Exercice 2 Soit u la solution entropique de

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x(f(u))(t,x) = 0\,, \quad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0\,, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $u \in C([0,\infty[; L^1(\mathbb{R}))$ *(on pourra se souvenir qu'on a prouvé que, lorsque la condition initiale est dans $W^{2,1}(\mathbb{R})$, alors la solution entropique est effectivement continue $[0,\infty[\to L^1(\mathbb{R})$).* Montrer que, pour tout $t > 0$, $||u(t)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq ||u_0||_{L^1(\mathbb{R})}$.

Exercice 3 On considère la loi de conservation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x \left(\dfrac{u^2}{2}\right)(t,x) = 0\,, \quad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = u_0(x) := \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{0.1}$$

où u_g et u_d sont deux réels.

i) Trouver $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(t,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t\,, \\ u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

soit solution faible de (0.1).

ii) Soit $a < b$ deux réels et m le milieu de $[a,b]$. Soit g croissante sur $[a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b g(s)(m-s)\,ds = \int_a^m (g(s) - g(2m-s))(m-s)\,ds$$

et en déduire que

$$m \int_a^b g(s)\,ds \leq \int_a^b g(s)s\,ds.$$

iii) On suppose que $u_g > u_d$. Montrer que la fonction u donnée en i) est solution entropique de (0.1).