Examen de DEA
"Solutions de viscosité"

26 février 2004, 2h, tous documents autorisés.

Exercice 1. Soit $\mathcal{V}$ un espace métrique compact. Soit $b : \mathbb{R}^N \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}^N$ une fonction telle que :

$$\begin{cases} |b(x,w) - b(y,w)| \leq C|y-x|, \qquad |b(x,w)| \leq C, \\ b \text{ est continue} \end{cases} \tag{0.1}$$

et $f : \mathbb{R}^N \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\begin{cases} |f(x,w) - f(y,w)| \leq C|y-x|, \qquad |f(x,w)| \leq C, \\ f \text{ est continue} \end{cases} \tag{0.2}$$

On pose alors :

$$H(x,u,p) = \sup_{w \in \mathcal{V}} \{-b(x,w) \cdot p + \lambda u - f(x,w)\}$$

pour un réel $\lambda > 0$.

1. Montrer que H vérifie :

$$H(x,u,p) - H(x,v,p) \geq \lambda(u-v) \text{ pour tout } u > v \text{ et tout } x, p \in \mathbb{R}^N \tag{0.3}$$

$$\text{Pour tout } R > 0, H \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}^N \times [-R,R] \times \overline{B}_R \tag{0.4}$$

$$|H(x,u,p) - H(y,u,p)| \leq C(|p|+1)|x-y| \text{ pour tout } x,y,p \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R} \tag{0.5}$$

2. On veut montrer un principe de comparaison pour l'équation $H(x,u,\nabla u) = 0$. Soit donc u, une sous-solution bornée de $H = 0$ et v, une sur-solution bornée de $H = 0$. On pose

$$M_{\alpha\epsilon} = \sup_{x,y} \{u(x) - v(y) - \frac{1}{2\epsilon}|x-y|^2 - \frac{\alpha}{2}(|x|^2 + |y|^2)\}.$$

   Montrer que si $(x_{\alpha\epsilon}, y_{\alpha\epsilon})$ est un maximiseur, alors :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\alpha \to 0} M_{\alpha\epsilon} = \lim_{h \to 0} (\sup\{u(x) - v(y) : x, y \in \mathbb{R}^N, |x-y| \leq h\}) =: M'$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2\epsilon}|x_{\alpha\epsilon} - y_{\alpha\epsilon}|^2 + \frac{\alpha}{2}(|x_{\alpha\epsilon}|^2 + |y_{\alpha\epsilon}|^2) = 0$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\alpha \to 0} u(x_{\alpha\epsilon}) - v(y_{\alpha\epsilon}) = M'$$

3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $u \leq v$.

Exercice 2. On considère l'équation $-u'' = 0$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Montrer que les seules solutions de viscosité sont les solutions affines.