Equations et Problemes differentiels

A.Y.LeRoux, Université Bordeaux 1

1 Le Problème théorique

On considère un intervalle réel $I = [x_0, x_0 + a]$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et on introduit une fonction f définie sur $I \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On cherche une fonction y définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, admettant un e dérivée y', et telle que, pour tout $x \in I$, l'équation différentielle

$$y'(x) \;=\; f(x, y(x)) \tag{1.1}$$

soit vérifiée. Cette fonction y est appelée *une solution,* quelquefois *une intégrale,* de l'équation différentielle (1.1).

La donnée de f est en fait la donnée de n fonctions f_i, que l'on supposera continues sur $I \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La solution y correspond donc aussi à n fonctions $y_i \in C^1(\mathbb{R})$. (1.1) correspond ainsi à un système différentiels de n équations

$$y_i'(x) \;=\; f_i(x, y_1(x),\ y_2(x),\ ...yn(x))\ .$$

Les équations précédentes sont dites du premier ordre, car seules des dérivées d'ordre un interviennent. Dans le cas général, on aurait à l'ordre p, (p entier) le système suivant d'équations

$$y^{(p)}(x) \;=\; f\ (x, y',\ ...,\ y^{(p-1)}) \tag{1.2}$$

où y est toujours définie sur $I \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On peut se ramener à un système d'ordre un en posant succèssivement

$$z_1 = y, \;\; z_2 = y', \;\; ...\ z_p = (y^{(p-1)},$$

pour obtenir le système de np équations

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &.... \\ z_{p-1}' &= z_p \\ z_p' &= f\ (x, z_1, z_2, ..., z_p). \end{aligned}$$

On appelle **condition de Cauchy** la donnée d'une valeur $y_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$y(x_0) \;=\; y_0 \tag{1.3}$$

Pour une équation, d'ordre p, compte tenu de son écriture sous la forme d'un système du premier ordre, cette condition correspond à la donnée de $(y_0,\ y_0',\ \ ..\ y_0^{(p-1)}) \in \mathbb{R}^{np}$, soit la valaur de y et de ses $p-1$ dérivées en x_0. On va montrer que, moyennant une condition de régularité sur f, le problème, dit **problème de Cauchy**, constitué de l'équation différentielle (1.1) et de la condition de Cauchy (1.3) admet une solution unique.

On note $|.|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $E = C(I;\mathbb{R}^n)$, muni de la norme uniforme

$$\|u\| \ = \ \operatorname*{Sup}_{x\in I} |u(x)|$$

Rappelons que E, muni de cette norme est un espace de Banach.

Définition 1.1 *Une fonction f est Lipschitzienne en y sur $I \times \mathbb{R}^n$ lorsque*

$$\exists\ L\ > 0\ \forall x \in I,\ \forall y\ \forall z\ \ |f(x,y) - f(x,z)| \leq |y - z| \tag{1.4}$$

La constante L est appelée constante de Lipschitz.

Théorème 1.2 *Si f vérifie la condition de Lipschitz (1.4), le problème de Cauchy (1.1) (1.3) admet une solution unique $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. En intégrant (1.1) entre x_0 et x, on obtient

$$y(x) \ = \ y_0 \ + \ \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\ d\xi \tag{1.5}$$

Réciproquement, si $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$, on retrouve bien (1.1), en dérivant, et (1.3) en faisant $x = x_0$. Ainsi (1.5) caractérise la solution du problème de Cauchy (1.1) (1.3) et on s'intéresse donc à y vérifiant (1.5).

On pose, pour $u \in E$,

$$\Phi(u)(x) \ = \ y_0 \ + \ \int_{x_0}^{x} \ f(\xi, u(\xi))\ d\xi \ \ . \tag{1.6}$$

On définit ainsi une application Φ de E dans E, et la fonction y cherchée est solution de

$$y \ = \ \Phi(y) \ . \tag{1.7}$$

Il reste à résoudre (1.7). Pour cela, on utilise le Lemme suivant, que l'on démontre ensuite.

Lemme 1.3 *Soit E un espace de Banach, Φ une application de E dans E telle que, pour au moins un entier p son itérée Φ^p soit une contraction, c'est à dire*

$$\exists c \in [0,1[\ \forall u,v \in E\ \ \|\Phi^p(u) \ - \ \Phi^p(v)\| \ \leq \|u - v\|, \tag{1.8}$$

alors (1.7) admet une solution unique $y \in E$.

Soit $u, v \in E$. On pose $u_p = \Phi^p(u),\ v_p = \Phi^p(v)$. On obtient succèssivement

$$|u_1(x) - v_1(x)| \ \leq \ \left| \int_{x_0}^{x} (f(\xi, u(\xi)) - f(\xi, v(\xi)))d\xi \right|$$

$$\leq \; L \int_{x_0}^{x} |u(\xi) - v(\xi)| \, d\xi$$

$$\leq \; L \, (x - x_0) \, \|u - v\| \; .$$

Supposons que l'on ait

$$|u_{p-1}(x) - v_{p-1}(x)| \; \leq \; L^{p-1} \, \frac{(x-x_0)^{p-1}}{(p-1)!} \, \|u - v\| \;\; ,$$

alors

$$|u_p(x) - v_p(x)| \; \leq \; L \int_{x_0}^{x} |u_{p-1}(\xi) - v_{p-1}(\xi)| \, d\xi \;\; ,$$

$$\leq \; L^p \, \|u - v\| \int_{x_0}^{x} \frac{(\xi - x_0)^{p-1}}{(p-1)!} \, d\xi \;\; \leq \;\; L^p \, \frac{(x-x_0)^p}{p!} \, \|u - v\|$$

Donc, pour tout entier p

$$\|\Phi^p(u) - \Phi^p(v)\| \; \leq \; \frac{L^p \, a^p}{p!} \, \|u - v\| \; ,$$

et pour p assez grand, on a bien

$$c \; = \; \frac{L^p \, a^p}{p!} \;\; < \; 1 \;\; ,$$

et Φ^p est bien une contraction, d'où le théorème en appliquant le lemme.

Démonstration du lemme.
Unicité : Si u vérifie $u = \Phi(u)$, on aussi $\Phi^p(u) = u$, et $\Phi^{p+1}(u) = \Phi(u)$.
Si u et v sont deux solutions, on a

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq \left\|\Phi^{p+1}(u) - \Phi^{p+1}(v)\right\| \leq c\|\Phi(u) - \Phi(v)\|,$$

d'où

$$(1 - c) \, \|\Phi(u) - \Phi(v)\| \; \leq \; 0 \; ,$$

et $\Phi(u) = \Phi(v)$, c'est à dire $u = v$.
Existence : On se donne $u_0 \in E$, et on construit $u_1 = \Phi^p(u_0)$, $u_2 = \Phi^p(u_1)$, .. $u_m = \Phi^p(u_{m-1})$. Alors

$$\|u_{m+1} - u_m\| \leq c\|u_m - u_{m-1}\| \leq c^2\|u_{m-1} - u_{m-2}\| \leq .. \leq c^m\|u_1 - u_0\|$$

et

$$\|u_{m+k} - u_m\| \leq \|u_{m+k} - u_{m+k-1}\| + \|u_{m+k-1} - u_{m+k-2}\| + ... + \|u_1 - u_0\|$$

$$\leq \; c^m \, (c^{p-1} + c^{p-2} + ... + c + 1) \, \|u_1 - u_0\| \; \leq \; \frac{c^m}{1-c} \, \|u_1 - u_0\| \; .$$

Donc $\left\|u_{m+p} - u_m\right\|$ tend vers zéro lorsque m tend vers $+\infty$. La suite (u_m) est de Cauchy dans E donc converge. On note u sa limite, qui vérifie nécéssairement $\Phi^p(u) = u$. Or

$$\|\Phi(u) - u\| \; \leq \; \left\|\Phi^{p+1}(u) - \Phi^p(u)\right\| \; \leq \; c \, \|\Phi(u) - u\| \; ,$$

donc

$$(1-c)\,\|\Phi(u)-u\| \;\leq\; 0\;,$$

et $\Phi(u)=u$, u est bien solution de (1.7).

Remarques. La condition de Lipschitz est assurée lorsque la fonction $y \longrightarrow f(x,y)$ est continument différentiable et les dérivées partielles bornées.

On peut facilement construire des contre exemples de non unicité lorsque cette condition n'est pas remplie. Par exemple, le problème de Cauchy suivant $y'=3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0)=0$ admet (au moins) les différentes solutions : $y=0$, $y=x^3$, $y=\min(0,x^3)$, $y=\max(0,x^3)$.

La méthode itérative qui a permis de construire la solution dans la démonstration précédente est peu exploitable au niveau numérique.

2 La méthode d'Euler Cauchy

On se restreindra ici au cas $n=1$, la généralisation à $n\geq 2$ étant triviale.

Soit N un entier, destiné à tendre vers l'infini. On pose $h=\frac{a}{N}$, ce qui correspond au pas de discrétisation. On pose $x_n = x_0 + nh$, pour $n=1,2,..N$.

La méthode d'Euler Cauchy consiste à calculer succèssivement

$$y_{n+1} \;=\; y_n + h\, f(x_n,y_n), \quad y_0 \; donné \tag{2.1}$$

en considérant y_n comme une approximation de $y(x_n)$, la valeur exacte de la solution au point x_n. On note

$$e_n \;=\; y_n \;-\; y(x_n)$$

l'erreur et l'analyse de la méthode consiste à estimer cette erreur e_n en fonction de h. pour cela, nous avons besoin de quelques outils et résultats préliminaires.

Définition 2.1 *Soit $g\in C(I)$, $\delta>0$. Le module de continuité de g est défini par*

$$\omega(\delta;g) \;=\; \max_{\substack{\xi,\eta\in I\\ |\xi-\eta|<\delta}} \; |g(\xi)-g(\eta)|\;.$$

Proposition 2.2 *Soit $g\in C(I)$. Le module de continuité $\omega(\delta,g)$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0.*

Démonstration. La fonction g est uniformément continue : pour tout $\epsilon>0$, il existe $\delta_0>0$ tel que $\Big|\xi-\eta\Big|<\delta_0 \;\Rightarrow\; \Big|g(\xi)-g(\eta)\Big|<\epsilon$. Donc

$$\forall\epsilon>0\;\;\exists\delta_0>0\;\;\delta<\delta_0\;\Rightarrow\;\omega(\delta;g)<\epsilon\;.$$

Lemme 2.3 *(Gronwall) Soit (ξ_n) une suite de réels positifs ou nuls, vérifiant*

$$\xi_{n+1} \leq\; (1+A)\,\xi_n \;+\; B\;\;, \quad avec\; A\geq 0,\; B\geq 0\;. \tag{2.2}$$

Alors, pour tout n,

$$\xi_n \;\leq\; \xi_0\, e^{nA} \;+\; \frac{e^{nA}-1}{A}\,B\;\;. \tag{2.3}$$

Démonstration. On montre d'abord

$$\xi_n \;\leq\; (1+A)^n\,\xi_0 \;+\; \frac{(1+A)^n \;-\; 1}{A}\;B$$

qui est vrai poir $n = 1$ par hypothèse. Si on la suppose vraie pour n, alors

$$\xi_{n+1} \;\leq\; (1+A)\left((1+A)^n\,\xi_0 \;+\; \frac{(1+A)^n - 1}{A}\;B\right) \;+\; B$$

$$\leq\; (1+A)^{n+1}\,\xi_0 \;+\; \frac{(1+A)^{n+1} - 1 - A + A}{A}\;B\;\;,$$

d'où la formule de récurrence. On en déduit (2.3) en remarquant que $(1+A)^n \leq e^{nA}$.

On a un premier résultat de convergence.

Théorème 2.4 *Si f vérifie la condition de Lipschitz (1.4), on a l'estimation d'erreur*

$$|e_n| \;\leq\; \frac{e^{L(x_n - x_0)} - 1}{L}\;\omega(h;y')$$

et la méthode d'Euler Cauchy converge, c'est à dire

$$\underset{0\leq n\leq N}{Max}|y_n - y(x_n)| \;\longrightarrow\; 0 \;si\; N \longrightarrow \infty\;\;(h = \frac{a}{N}\;\longrightarrow 0)\;.$$

Démonstration. La solution y vérifie

$$y(x_{n+1}) \;=\; y(x_n) \;+\; \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(\xi)\,d\xi \;=\; y(x_n) \;+\; h\;f(x_n, y(x_n)) \;+\; h\;\epsilon_n\;,$$

avec

$$\epsilon_n \;=\; \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(\xi)\,d\xi \;-\; y'(x_n) \;=\; \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (y'(\xi) - y'(x_n))\,d\xi$$

Donc

$$|\epsilon_n| \;\leq\; \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} |y'(\xi) - y'(x_n)|\,d\xi \;\leq\; \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \omega(h;y')\,d\xi \;\leq\; \omega(h;y')$$

On a

$$e_{n+1} \;=\; y_n - y(x_n) \;+\; h(f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n))) \;-\; h\;\epsilon_n\;,$$

donc, en utilisant la formulke de Lipschitz,

$$|e_{n+1}| \;\leq\; (1 + hL)\;|e_n| \;+\; h\;\omega(h, y')\;,$$

et en appliquant le Lemme de Gronwall, avec $A = hL$ et $B = h\omega(h, y')$, il vient

$$|e_n| \;\leq\; e^{nhL}\;|e_0| \;+\; \frac{e^{nhL} - 1}{hL}\;h\;\omega(h, y'),$$

d'où le résultat sachant que $e_0 = 0$ et $nh = x_n - x_0$.

Le résultat précédent est limité aux points de discrétisation. On définit la solution approchée comme une fonction de $C(I)$, par

$$y_h(x) \;=\; y_n \;+\; \frac{y_{n+1} - y_n}{h}\;(x - x_n) \quad \text{si } x_n \leq x \leq x_{n+1}\;.$$

Théorème 2.5 *La solution approchée y_h tend vers la solution exacte y dans $C(I)$ lorsque $h \longrightarrow 0$.*

Démonstration. Soit $x \in I$, et n l'entier tel que $x_n \leq x < x_{n+1}$. Alors

$$|y_h(x) - y(x)| \leq |y_h(x) - y_n| + |y_n - y(x_n)| + |y(x_n) - y(x)|$$

$$\leq \; |y_h(x) - y_n| \; + \; |e_n| \; + \; \omega(h, y) \; .$$

Par ailleurs

$$|y_h(x) - y_n| \; \leq \; |y_{n+1} - y_n| \; \leq \; h \; |f(x_n, y_n)| \; .$$

Comme y_n reste bornée, $f(x_n, y_n)$ est bornée $\left(\left|f(x_n, y_n\right| \leq K\right)$ et on obtient

$$|y_h(x) - y(x)| \; \leq \; h \; K \; + \; \omega(h, y') \; + \; \omega(h, y) \; ,$$

d'où

$$\|y_h - y\| \; \leq \; h \; K \; + \; \omega(h; y') \; + \; \omega(h; y) \; ,$$

qui tend vers zéro lorsque h tend vers zéro.

3 Majoration de l'erreur.