Chapitre 2 : Ensembles de nombres

(3 cours)

1 Propriétés de $\mathbb{N}$

1.1 Raisonnement par récurrence

Theorème 1 *Soit $P(n)$ une propriété fonction d'une variable $n \in \mathbb{N}$. La propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ssi*
- $P(0)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ est vraie.

Corollaire 1 *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété fonction d'une variable $n \in \mathbb{N}$, pour $n \geq N$.*
La propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ ssi
- $P(N)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, si $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ est vraie.

Corollaire 2 *Soit $P(n)$ une propriété fonction d'une variable $n \in \mathbb{N}$. La propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ssi*
- $P(0)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \{0, 1, 2 \ldots, n\}$, $P(n+1)$ est vraie.

Exemples :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
(trouver la formule par le développement de $(k+1)^2$)

2. pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$
avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, et $0! = 1$ par convention.

Preuve : Nous commençons par montrer la formule du triangle de Pascal. Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$ et soit $k \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq k \leq n$. Montrons que
$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$$
On a

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

donc, en mettant en facteur $\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\Big(\frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k}\Big) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{(n+1-k)k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!},$$

ce qui est bien la relation $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.

Montrons maintenant la formule du binôme. Au rang $n = 1$, cette formule s'écrit

$$a + b = C_1^0 a + C_1^1 b,$$

ce qui est vrai. Supposons que la formule du binôme soit vraie au rang n. Calculons $(a+b)^{n+1}$, en utilisant cette formule pour évaluer $(a+b)^n$. On a

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k},$$

donc, en sortant de chacune des deux sommes les termes extrêmes, on obtient

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}.$$

On remarque maintenant que, en remplaçant k par $k'-1$ dans le calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k'=1}^{n} C_n^{k'-1} a^{k'} b^{n-(k'-1)}.$$

On peut maintenant remettre k à la place de k' ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)}.$$

On remettant cette expression dans l'évaluation de $(a+b)^{n+1}$, on trouve

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}.$$

On peut donc regrouper en mettant en facteur les termes $a^k b^{n+1-k}$. On trouve

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) a^k b^{n+1-k},$$

relation dans laquelle on peut maintenant appliquer la relation du triangle de Pascal, écrite plus haut :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Comme $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$, on a bien montré la formule du binôme au rang $n+1$, ce qui achève de prouver la formule par récurrence.

3. pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$, pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

en posant par convention $a^0 = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Autres propriétés de $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ est totalement ordonné par la relation $\leq$ (détailler). Tout partie non vide A de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, c'est à dire qu'il existe $n \in A$ tel que pour tout $m \in A$, $n \leq m$. Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

2 Relations d'inclusion entre les différents ensembles de nombres

Rappel : L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe deux entiers relatifs $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}_\star$ avec $x = \frac{a}{b}$.
Propriétés de $+$ et $\times$ dans $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$
$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$
$\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$

Theorème 2 *Soit $p \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $n^2 < p < (n+1)^2$. Alors $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.*

Preuve. Supposons que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. Soit $B = \{d \in \mathbb{N}_\star, \text{ il existe } c \in \mathbb{N}_\star, \sqrt{p} = \dfrac{c}{d}\}$. Soit b le plus petit élément de B, et $a \in \mathbb{N}_\star$ tel que $\sqrt{p} = \dfrac{a}{b}$. Comme $p - n^2 = (\sqrt{p}-n)(\sqrt{p}+n)$, on a

$$\sqrt{p} = \frac{p-n^2}{\sqrt{p}-n} - n,$$

donc

$$\sqrt{p} = \frac{p - n\sqrt{p}}{\sqrt{p}-n}.$$

On remplace $\sqrt{p}$ par $\frac{a}{b}$ dans le membre de droite, ce qui donne

$$\sqrt{p} = \frac{bp - na}{a - nb}.$$

Comme $n < \sqrt{p} < n+1$, on a $n < \frac{a}{b} < n+1$, donc en multipliant par b, on obtient $nb < a < nb + b$, ce qui implique $0 < a - nb < b$, et en multipliant par a, comme $\dfrac{a^2}{b^2} = p$, $na < bp < na + a$, ce qui implique

$0 < bp - na < a$. Or $a - nb \in \mathbb{N}_\star$ et $bp - na \in \mathbb{N}_\star$. On a donc trouvé un couple $(c, d) \in \mathbb{N}_\star^2$ tel que $\sqrt{p} = \frac{c}{d}$ avec $d < b$. Il y a donc contradiction avec b est le plus petit élément de B.

Remarque : il y a des nombres irrationnels plus "compliqués" : π, e, etc.

3 Propriétés de $\mathbb{R}$

1. propriétés de $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$.
2. $\leq$ ordre total sur $\mathbb{R}$, $+$ et $\times$.
3. propriété d'Archimède : pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a < n$.
4. densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

   Theorème 3 *Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < b$ et il existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < s < b$.*

   Preuve. Cas $0 \leq a < b$.

   i) Prendre $n > \frac{1}{b-a}$ qui existe par propriété d'Archimède, puis k tel que $k < nb \leq k+1$ (qui existe par propriété d'Archimède et par nombre fini d'entiers plus petits qu'un majorant entier de nb). Comme $k + 1 \leq nb$ et $nb > 1 + na$ alors $na < k < nb$.

   ii) On définit $u = \sqrt{2} - 1$. $u \notin \mathbb{Q}$ et $0 < u < \frac{1}{2}$. Par récurrence, $u^n \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$, il existe $(m, p) \in \mathbb{Z}^2$ avec $u^n = m + p\sqrt{2}$, et donc $u^n \notin \mathbb{Q}$. On choisit n tel que $n > \frac{1}{b-a}$ (propriété d'Archimède), donc $b > a + u^n$, puis on choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < \frac{b}{u^n} \leq k+1$. On a alors $a < ku^n < b$.

   cas $a < 0 < b$ se traite en $a = 0$, b

   cas $a < b \leq 0$ se traite en $0 \leq -b < -a$.

5. parties non vides majorées et minorées, parties bornées. Intervalles.

   Définition 1 *Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi pour tout $(x, y) \in I^2$, si $x < y$ alors pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq z \leq y$, $z \in I$.*

   Description de tous les types d'intervalle : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$. $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ (préciser si majorés, minorés, bornés).

6. borne supérieure : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Alors il existe un réel S qui est le plus petit des majorants de A. Ce nombre est appelé borne supérieure de la partie A et est noté $\sup A$. Il peut ou non appartenir à A.

   Theorème 4 *Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Le réel S est égal à $\sup A$, la borne supérieure de A, ssi*

   i)
   $$\forall x \in A, x \leq S$$

   ii)
   $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+, \exists x \in A, S - \varepsilon < x.$$

Preuve

Exemples

Conséquence : idem borne inférieure en prenant les opposés.

Exemples.

Remarque : La borne supérieure dans $\mathbb{R}$ d'une partie de $\mathbb{Q}$ n'est a priori pas dans $\mathbb{Q}$: prendre $A = \{x \in \mathbb{Q}, x < s\}$, où $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4 Exercices

4.1 Triangle de Pascal

i) Construire le triangle de Pascal (c'est à dire calculer les coefficients C_n^k pour tout $n \leq 8$ et tout $k \leq \frac{n}{2}$. Donner le développement de $(x+1)^4$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ii) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

4.2 Raisonnement par récurrence

En utilisant le développement de $(1+k)^3$, pour $k = 1, \ldots, n$ et en sommant sur k, calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Prouver ensuite la formule obtenue par un raisonnement par récurrence.

4.3 Raisonnement par récurrence

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, que

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

en posant $a^0 = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

4.4 Ensembles de nombres

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Dire si chacune des propriétés ci-dessous est vraie ou fausse. Si la propriété est vraie, la démontrer. Si la propriété est fausse, donner un contre-exemple.
i) $\forall r \in \mathbb{Q}, a < r < b$.
ii) $\exists r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_\star^+, a < \ln r < b$.
iii) $\exists (r_1, r_2) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$, $\frac{4}{5} < r_1 < r_2 < \frac{5}{4}$ et $r_1 + r_2 = 2$.

4.5 Rationnels, irrationnels

Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.6 Rationnels et irrationnels

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}_\star)^2$ vérifiant la relation $a^2 = 2b^2$.
i) Montrer que a est pair,
ii) Montrer que b est pair,
iii) en déduire qu'il n'existe pas $(a, b) \in (\mathbb{N}_\star)^2$ vérifiant la relation $a^2 = 2b^2$.

4.7 Rationnels et irrationnels

Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Donner des exemples de $(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ tels que $a+b \in \mathbb{Q}$ et des exemples de $(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ tels que $ab \in \mathbb{Q}$.

4.8 Rationnels et irrationnels

i) Prouver que si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}_\star$, alors $a+b$, $a-b$, ab, $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{a}{b}$ sont dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
ii) Donner des exemples de $(a,b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ tels que $a+b$, $a-b$, ab, $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{a}{b}$ sont dans $\mathbb{Q}$.

4.9 Rationnels et irrationnels

Soit $p \in \mathbb{N}_\star$ tel qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $(n_0)^2 < p < (n_0+1)^2$. On définit l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}$, il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{p}\}$.
i) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{p}$.
ii) Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $x+y \in E$, $-x \in E$, $xy \in E$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$ et pour tout $x \in E$, $x^n \in E$.
iii) Montrer que $E \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.
iv) Soit $(z,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < z < t$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}_\star$ tel que $0 < (\sqrt{p}-n_0)^m < t-z$. On note $u = (\sqrt{p}-n_0)^m$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $ku < t \leq (k+1)u$. Utiliser $z < t-u$ pour conclure qu'il existe un élément de E compris entre z et t.

4.10 Rationnels, irrationnels

Soit $f \ : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(r,s) \mapsto r + s\sqrt{2}$.
i) Montrer que f est injective.
ii) f est-elle surjective ?

4.11 Rationnels, irrationnels

On considère la fonction $f \ : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(n,m) \mapsto n\sqrt{2} + m\sqrt{3}$.
i) Montrer que f est injective.
ii) Montrer que $0 < \sqrt{6}-2 < \frac{1}{2}$.
iii) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$, $0 < (\sqrt{6}-2)^n < \frac{1}{n}$.
iv) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, il existe $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a < n + m\sqrt{6} < b$.
v) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On pose $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $b' = \frac{b}{\sqrt{2}}$. En appliquant la question iv) pour a' et b', montrer qu'il existe $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a < f(n,m) < b$.

4.12 Partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la partie entière de x, notée $E(x)$, comme l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$.
i) Faire une représentation graphique de la fonction E.
ii) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0,1\}$.

4.13 Majorants et bornes supérieures

Soit A une partie non vide majorée vérifiant : il existe $s \in A$ tel que s est un majorant de A. Montrer que s est la borne supérieure de A.

4.14 Majorants de parties réelles

Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrer que si B est majorée, alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

4.15 Minorants, majorants

Pour chaque partie de $\mathbb{R}$ suivante, étudier l'existence !de majorants et de minorants. Le cas échéant, donner la valeur de la borne supérieure et de la borne inférieure (et le démontrer).
i) $\mathbb{N}$
ii) $\mathcal{D}$, ensemble des nombres décimaux.
iii) $\mathbb{Q}^c$
iv) $\{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}_\star, x = (-1)^n\}$
v) $\{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}_\star, x = \frac{1}{n} + (-1)^n\}$
vi) $\{x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = \frac{2y}{1+y^2}\}$

4.16 Récurrence et bornes

Soit p un entier non nul.
1)Soient deux réels a et b quelconques tel que $0 < a < b$. Démontrer la formule suivante en utilisant l'expression de la somme d'une suite géometrique de raison $\frac{a}{b}$:

$$b^{p+1} - a^{p+1} = (b-a)\sum_{i=0}^{p} a^i b^{p-i}.$$

2)Déduire de 1), la relation :

$$(p+1)a^p \leq \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{b-a} \leq (p+1)b^p.$$

3)Prouver par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^p \leq \frac{n^{p+1}}{p+1} \leq \sum_{i=1}^{n} i^p.$$

4)Soit $u_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^{n} i^p$.
Montrer que : $\frac{1}{p+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p+1}$.
5)Donner un majorant et un minorant de $E = \{x \in \mathbb{R};$ il existe $n \in \mathbb{N}_\star$ tel que $x = u_n\}$. En deduire la borne inférieure de E.

4.17 Partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la partie entière de x, notée $E(x)$, comme l'unique entier relatif tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
i) Faire une représentation graphique de la fonction $E\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
ii) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0,1\}$.
iii) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $A \subset \mathbb{R}$ par $A = \{y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, y = \frac{E(10^n x)}{10^n}\}$. Montrer que A est majorée et donner sa borne supérieure.

4.18 Propriétés de $\mathbb{R}$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

4.19 Propriétés de $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Evaluer
$$S = \sum_{p=0}^{2n} a^p - \sum_{p=0}^{n} a^{2p}.$$

4.20 Propriétés de $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\sqrt{3}\}$. Soit y défini par
$$y = \frac{x+3}{x+1}.$$

i) Montrer que $y \neq \sqrt{3}$.
ii) Montrer que $|y - \sqrt{3}| \leq |x - \sqrt{3}|$.

5 Correction d'exercices

Correction de l'exercice 4.1

1) On utilise la formule de construction donnée par le cours $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.
On fabrique ainsi le triangle :

$$\left[\begin{array}{lllllllll}
1 & 1 & & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
\end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.
ii) Démontrons cette formule par récurrence sur n. Elle est vraie au rang $n = 1$ car $C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2^1$.
Supposons cette relation vraie au rang n. Au rang $n+1$, on a
$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k + 1,$$
en sortant les deux extrêmités de la somme. On utilise alors la relation du triangle de Pascal. On obtient
$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) + 1.$$
On utilise maintenant $1 = C_n^0$ et $1 = C_n^n$. On obtient

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

On peut poser $k' = k - 1$ dans la première des deux sommes du membre de droite ci-dessus. On trouve

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = \sum_{k'=0}^{n} C_n^{k'} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^{n+1},$$

par hypothèse de récurrence. On a donc bien prouvé la relation au rang $n+1$ et donc on a prouvé la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$.
Remarque : On démontre directement ce résultat en appliquant la formule du binôme pour le développement de $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k 1^{n-k}$.

Correction de l'exercice 4.2

On écrit, pour $n \in \mathbb{N}_\star$:

$$\left\{\begin{array}{llllll} (0+1)^3 & = & & & & +1 \\ (1+1)^3 & = & 1^3 & +3.1^2 & +3.1 & +1 \\ (2+1)^3 & = & 2^3 & +3.2^2 & +3.2 & +1 \\ (3+1)^3 & = & 3^3 & +3.3^2 & +3.3 & +1 \\ \ldots & & & & & \\ (n+1)^3 & = & n^3 & +3.n^2 & +3.n & +1 \end{array}\right.$$

En additionnant ces $n+1$ égalités, on trouve, après simplification de $1^3 + \ldots + n^3$,

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + n + 1.$$

On utilise la relation, démontrée dans le cours, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, ce qui donne (on met $n+1$ en facteur, et l'on voit que n se met en facteur)

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démontrons cette relation par récurrence. Elle est vérifiée au rang $n = 0$, car elle s'écrit $0 = 0$. Supposons la vérifiée au rang n. On alors, au rang $n+1$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2,$$

par hypothèse de récurrence. On doit alors évaluer l'expression donnée dans le membre de droite. On vérifie, en développant, que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

ce qui prouve la relation au rang $n+1$.

Correction de l'exercice 4.3

La relation est vérifiée au rang $n=0$, puisque elle s'écrit, pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{0} a^k = 1 = \frac{1-a}{1-a}.$$

Supposons la relation vérifiée au rang n. On a, pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1},$$

par hypothèse de récurrence. Or on a

$$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a},$$

ce qui prouve la relation au rang $n+1$.

Correction de l'exercice 4.4

i) La propriété $\forall r \in \mathbb{Q}, a < r < b$ est fausse : il suffit de prendre comme contre-exemple $a=1$, $b=2$ et $r=3$.
ii) Montrons que la propriété $\exists r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_\star^+, a < \ln r < b$ est vraie. Puisque $a<b$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, on a aussi $\exp(a) < \exp(b)$. Donc, d'après le cours, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\exp(a) < r < \exp(b)$. Puisque $\exp(a) > 0$, on a donc $r > 0$. Donc $r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_\star^+$. La fonction ln étant strictement croissante, on a donc $\ln(\exp(a)) < \ln r < \ln(\exp(b))$ et donc $a < \ln r < b$.
iii) Montrons que la propriété $\exists (r_1, r_2) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2,\ \frac{4}{5} < r_1 < r_2 < \frac{5}{4}$ et $r_1 + r_2 = 2$ est vraie. D'après le cours, il existe $r_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\frac{4}{5} < r_1 < 1$. Posons alors $r_2 = 2 - r_1$. On a $r_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, car si $r_2 \in \mathbb{Q}$, on aurait $r_1 = 2 - r_2 \in \mathbb{Q}$. On a

$$-1 < -r_1 < -\frac{4}{5}$$

donc en ajoutant 2,

$$1 < 2 - r_1 < 2 - \frac{4}{5},$$

donc

$$1 < r_2 < \frac{6}{5} < \frac{5}{4}.$$

On a donc trouvé $(r_1, r_2) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ tel que

$$\frac{4}{5} < r_1 < r_2 < \frac{5}{4} \text{ et } r_1 + r_2 = 2.$$

Correction de l'exercice 4.5

Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ avec $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Comme $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} > 0$, on a $r \neq 0$. On a alors

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5}-r)^2,$$

donc

$$5+2\sqrt{6} = 5+r^2-2r\sqrt{5},$$

donc

$$4(\sqrt{6}+r\sqrt{5})^2 = r^4,$$

donc

$$24+20r^2+8r\sqrt{30} = r^4,$$

donc

$$\sqrt{30} = \frac{r^4-20r^2-24}{8r} \in \mathbb{Q},$$

ce qui n'est pas possible puisque d'après le cours, $\sqrt{30} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Il y a donc contradiction, et donc $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 4.6

i) Supposons a impair. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ avec $a = 2p+1$. Comme $a^2 = 2b^2$, on obtient alors $1 = 2(b^2-2p^2-2p)$ donc $\frac{1}{2} = b^2-2p^2-2p$. Or b^2-2p^2-2p est un entier relatif, et ne peut pas être égal à $\frac{1}{2}$. Donc a n'est pas impair. Donc a est pair et il existe $p \in \mathbb{N}_\star$ tel que $a = 2p$.
ii) On a alors $4p^2 = 2b^2$, donc $b^2 = 2p^2$. Le couple (b,p) satisfait alors les hypothèses satisfaites par le couple (a,b), qui ont permis de conclure que a est pair. Donc b est pair, et il existe $q \in \mathbb{N}_\star$ avec $b = 2q$.
iii) On pose $B = \{c \in \mathbb{N}_\star, \exists d \in \mathbb{N}_\star, d^2 = 2c^2\}$. Si B est non vide, comme B est une partie de $\mathbb{N}$, B admet un plus petit élément. Notons b ce plus petit élément, et notons $a \in \mathbb{N}_\star$ un entier tel que $a^2 = 2b^2$. D'après la question i), a est pair, donc il existe $p \in \mathbb{N}_\star$ tel que $a = 2p$. D'après la question ii), b est pair, et il existe $q \in \mathbb{N}_\star$ avec $b = 2q$. On a alors $4p^2 = 2.4q^2$, donc $p^2 = 2q^2$. Donc $q \in B$, par propriété des éléments de B. Or $b = 2q$ donc $0 < q < b$, ce qui est en contradiction avec b est le plus petit élément de B. Donc B est vide, ce qui répond à la question.

Correction de l'exercice 4.7

On a $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$. Si nous supposions $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ rationnel, il existerait $(a,b) \in (\mathbb{N}_\star)^2$ tel que $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ donc $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = \frac{a^2}{b^2}$. On a alors $\sqrt{6} = \frac{a^2-5b^2}{2b^2}$, ce qui est le quotient de deux nombres entiers. C'est en contradiction avec $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ prouvé en cours.
Si l'on pose $a = r+\sqrt{2}$ et $b = r-\sqrt{2}$, où $r \in \mathbb{Q}$ quelconque, on a à la fois $a+b \in \mathbb{Q}$ et $ab \in \mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 4.13

Puisque s est un majorant de A, il suffit de montrer que s est le plus petit des majorants de A. Soit $s' \in \mathbb{R}$ avec $s' < s$. Il existe alors un élément de A, l'élément s, strictement plus grand que s'. Donc s' n'est pas un majorant de A. Il n'existe donc pas de majorants de A plus petits que s. Donc s est la borne supérieure de A.
Exemples : i) $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 1\} =]-\infty,1]$: 1 est un majorant de A, et $1 \in A$ donc $\sup A = 1$.

ii)$A = \{-1, 0, 3, -3, 8, -10\}$: pour tout $x \in A$, $x \leq 8$ et $8 \in A$. Donc $\sup A = 8$.

La même conclusion est également valable pour une partie minorée B : un minorant de B appartenant à B est égal à sa borne inférieure $\inf B$.

Correction de l'exercice 4.15

i) L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, puisque par propriété d'Archimède, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $x \leq n$. L'ensemble $\mathbb{N}$ est en revanche minoré par tout les nombres négatifs. Montrons que sa borne inférieure est 0.
D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$;
d'autre part, si $x > 0$, l'élément 0 de $\mathbb{N}$ est inférieur à x donc x n'est pas un minorant. 0 est donc le plus petit des minorants de $\mathbb{N}$. c'est donc sa borne inférieure.
ii) L'ensemble $\mathcal{D}$ (ainsi que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$) n'est ni majoré (il contient $\mathbb{N}$ et la propriété d'Archimède s'applique), ni minoré (il contient les opposés des nombres entiers).
iii) L'ensemble $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas majoré, car pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ compris entre x et $x + 1$ par exemple. Il n'est pas minoré, car pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ compris entre $x - 1$ et x.
iv) Montrons que $\{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}_\star, x = (-1)^n\} = \{-1, 1\}$. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n = 1$ ou $(-1)^n = -1$. D'autre part, $1 = (-1)^2$ et $-1 = (-1)^1$. Les deux ensembles sont donc inclus l'un dans l'autre. Ils sont donc égaux. Comme $\{-1, 1\}$ est fini, il est majoré et minoré par respectivement le maximum et le minimum de ses éléments, qui sont ainsi respectivement sa borne supérieure et sa borne inférieure. On a donc
$\sup\{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}_\star, x = (-1)^n\} = 1$
et
$\inf\{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}_\star, x = (-1)^n\} = -1$.
v) Posons $A = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}_\star, x = \frac{1}{n} + (-1)^n\}$. Calculons quelques éléments de A, obtenus par les premières valeurs de $n \in \mathbb{N}_\star$. On trouve ainsi que $\{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}\} \subset A$. On est ainsi amené à calculer, pour $p \in \mathbb{N}_\star$, les éléments de A correspondants à $n = 2p$, donc $\frac{1}{2p} + (-1)^{2p} = \frac{2p+1}{2p}$, et les éléments de A correspondants à $n = 2p-1$, donc $\frac{1}{2p-1} + (-1)^{2p-1} = \frac{2-2p}{2p-1}$. Comme $\frac{3}{2} - \frac{2p+1}{2p} = \frac{p-1}{2p} \geq 0$ et $\frac{2-2p}{2p-1} \leq 0 \leq \frac{3}{2}$, la valeur $\frac{3}{2}$ est donc un majorant de A, appartenant à A. L'ensemble A est donc majoré et $\sup A = \frac{3}{2}$.
Comme $\frac{2p+1}{2p} \geq 0$ et comme $-1 + \frac{1}{2p-1} \geq -1$, -1 est donc un minorant de A. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq \frac{1}{2\varepsilon}$, donc $2q + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, donc $2(q+1) - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, donc $-1 + \frac{1}{2(q+1)-1} < -1 + \varepsilon$. Donc la valeur -1 satisfait les propriétés

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+, \exists x \in A, x < -1 + \varepsilon$$

et

$$\forall x \in A, -1 \leq x.$$

Donc $\inf A = -1$.
vi) Posons $B = \{x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = \frac{2y}{1+y^2}\}$. Comme pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(1 + y)^2 \geq 0$, on a donc $2y \geq -(1 + y^2)$ donc $\frac{2y}{1+y^2} \geq -1$. Le réel -1 est donc un minorant de B. Comme, pour $y = -1$, on a $\frac{2y}{1+y^2} = -1$, on a donc $-1 \in B$ donc $\inf B = -1$.
Comme pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(1 - y)^2 \geq 0$, on a donc $2y \leq 1 + y^2$ donc $\frac{2y}{1+y^2} \leq 1$. Le réel 1 est donc un

majorant de B. Comme, pour $y = 1$, on a $\frac{2y}{1+y^2} = 1$, on a donc $1 \in B$ donc $\sup B = 1$.

Correction de l'exercice 4.10

i) Soient $(r,s) \in \mathbb{Q}^2$ et $(r',s') \in \mathbb{Q}^2$ tels que $f(r,s) = f(r',s')$ (en toute rigueur, on devrait écrire $f\Big((r,s)\Big)$ au lieu de $f(r,s)$, mais l'abus de notation est ici l'usage pour les fonctions de plusieurs variables). On a donc

$$r + s\sqrt{2} = r' + s'\sqrt{2},$$

donc

$$(s - s')\sqrt{2} = r' - r.$$

Si l'on suppose $s \neq s'$, on obtient $\sqrt{2} = \frac{r'-r}{s-s'} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible, puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc $s = s'$, et donc, comme $r' - r = (s - s')\sqrt{2}$, $r = r'$. La fonction f est donc injective.
ii) Montrons que $\sqrt{3}$ n'a pas d'antécédent par f. Supposons qu'il existe $(r,s) \in \mathbb{Q}^2$ avec $r+s\sqrt{2} = \sqrt{3}$. On ne peut pas avoir $s \neq 0$, sinon $\sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. On a donc $r = \sqrt{3} - s\sqrt{2}$, donc $r^2 = 3 + 2s^2 - 2s\sqrt{6}$, donc, puisque $s \neq 0$, $\sqrt{6} = \frac{3+2s^2-r^2}{2s} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas possible puisque $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. Donc il n'existe pas $(r,s) \in \mathbb{Q}^2$ avec $r + s\sqrt{2} = \sqrt{3}$, et donc f n'est pas surjective.

Correction de l'exercice 4.16

1) Comme $a < b$ donc $\frac{a}{b} \neq 1$, on peut appliquer la formule donnant la somme des $p+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{a}{b}$:

$$\sum_{i=0}^{p} (\frac{a}{b})^i = \frac{1 - \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}}}{1 - \frac{a}{b}}.$$

En multipliant par $b^p(b-a)$ les deux membres de cette égalité, on obtient le résultat demandé.
2) Comme $a < b$, on a

$$\sum_{i=0}^{p} a^i a^{p-i} \leq \sum_{i=0}^{p} a^i b^{p-i} \leq \sum_{i=0}^{p} b^i b^{p-i},$$

donc

$$(p+1)a^p \leq \sum_{i=0}^{p} a^i b^{p-i} \leq (p+1)b^p.$$

Comme la question i) montre que

$$\sum_{i=0}^{p} a^i b^{p-i} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{b - a},$$

on a donc prouvé le résultat demandé.
3) Prouvons la relation pour $n = 1$. Elle s'écrit

$$0 \leq \frac{1}{p+1} \leq 1,$$

ce qui en effet vérifié. Supposons que la relation soit vraie au rang n. On a, au rang $n+1$,

$$\sum_{i=0}^{n} i^p = \sum_{i=0}^{n-1} i^p + n^p \leq \frac{n^{p+1}}{p+1} + n^p,$$

par hypothèse de récurrence. On applique la question 2) pour $a = n$ et $b = n + 1$. On trouve

$$(p+1)n^p \leq \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n+1-n},$$

donc $(p+1)n^p \leq (n+1)^{p+1} - n^{p+1}$. Ceci montre que

$$\sum_{i=0}^{n} i^p \leq \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1},$$

et donc démontre la partie de gauche du résultat à prouver. On a maintenant

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^p = \sum_{i=1}^{n} i^p + (n+1)^p \geq \frac{n^{p+1}}{p+1} + (n+1)^p,$$

par hypothèse de récurrence. On applique la question 2) pour $a = n$ et $b = n + 1$. On trouve

$$\frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n+1-n} \leq (p+1)(n+1)^p,$$

donc $(n+1)^{p+1} - n^{p+1} \leq (p+1)(n+1)^p$. On obtient donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^p \geq \frac{n^{p+1} + (n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1},$$

ce qui est la partie de droite de la double inégalité à démontrer au rang $n + 1$. Cela montre donc complètement que la relation de récurrence est vérifiée au rang $n + 1$. Elle est donc prouvée pour tout $n \in \mathbb{N}_\star$.

4) En divisant par n^{p+1} le résultat obtenu en 3), on trouve que

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^{n} i^p,$$

ce qui est la partie de gauche de la double inégalité à prouver. On trouve aussi, avec la question 3), que

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=0}^{n-1} i^p \leq \frac{1}{p+1},$$

or on a

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=0}^{n-1} i^p = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^{n} i^p - \frac{n^p}{n^{p+1}},$$

donc

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{i=1}^{n} i^p \leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n},$$

ce qui est la partie droite de l'inégalité à prouver.

5) On a donc, en appliquant la question 4) : pour tout $x \in E$,

$$\frac{1}{p+1} \leq x \leq 1 + \frac{1}{p+1},$$

donc un minorant de E est $\frac{1}{p+1}$ et un majorant est $1 + \frac{1}{p+1}$. Montrons que $\frac{1}{p+1}$ est la borne inférieure de E. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$. Choisissons $n \in \mathbb{N}_\star$ avec $\frac{1}{n} < \varepsilon$. On a alors, en appliquant la question 4),

$$u_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p+1} < \frac{1}{p+1} + \varepsilon.$$

Cela montre donc que la borne inférieure de E est $\frac{1}{p+1}$.

Correction de l'exercice 4.17

i) Noter que la fonction E vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [n, n+1[, E(x) = n.$$

ii) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

et

$$E(y) \leq y < E(y) + 1$$

donc

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2.$$

Donc $x + y \in [E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 2[$. Comme

$$[E(x)+E(y), E(x)+E(y)+2[= [E(x)+E(y), E(x)+E(y)+1[\cup[E(x)+E(y)+1, E(x)+E(y)+2[,$$

on en déduit $x+y \in [E(x)+E(y), E(x)+E(y)+1[$ ou $x+y \in [E(x)+E(y)+1, E(x)+E(y)+2[$. Dans le premier cas, on obtient que $E(x)+E(y)$ est un entier relatif tel que

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 1,$$

et donc par définition de la partie entière, $E(x+y) = E(x) + E(y)$, donc $E(x+y) - E(x) + E(y) = 0$. Dans le second cas, on obtient

$$E(x) + E(y) + 1 \leq x + y < E(x) + E(y) + 2,$$

et donc par définition de la partie entière, $E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$. Donc $E(x+y) - E(x) + E(y) = 1$. Donc on a toujours $E(x+y) - E(x) + E(y) \in \{0, 1\}$.
iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la fonction partie entière,

$$E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1,$$

donc

$$\frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \frac{E(10^n x)}{10^n} + 10^{-n}.$$

L'inégalité de gauche montre que toutes les valeurs de A sont majorées par x, donc que x est un majorant de A. Montrons que x est la borne supérieure de A.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-n} < \varepsilon$. Il suffit de prendre $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 10}$, qui existe par propriété d'Archimède. On a alors, en utilisant l'inégalité de droite ci-dessus,

$$x < \frac{E(10^n x)}{10^n} + 10^{-n} < \frac{E(10^n x)}{10^n} + \varepsilon,$$

donc

$$x - \varepsilon < \frac{E(10^n x)}{10^n}.$$

Cela montre bien que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+, \exists y \in A, x - \varepsilon < y.$$

Comme x est un majorant de A, x en est donc la borne supérieure.

Remarque : si x est un nombre décimal, A est en fait un ensemble fini contenant x.

Correction de l'exercice 4.18

On a $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0$. De même, $x^2 + z^2 - 2xz \geq 0$ et $y^2 + z^2 - 2yz \geq 0$. En additionnant ces trois inégalités, on trouve

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0,$$

ce qui est bien le résultat annoncé. Remarque : on a l'égalité dès que $x = y = z$.

Correction de l'exercice 4.19

On a

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{2n} - (1 + a^2 + a^4 + \ldots + a^{2n}),$$

donc

$$S = a + a^3 + a^5 + \ldots + a^{2n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} a^{2p+1}.$$

On a donc

$$S = a \sum_{p=0}^{n-1} (a^2)^{p+1}.$$

Si $a = 1$, S est la somme de n termes égaux à 1, donc $S = n$.
Si $a = -1$, S est la somme de n termes égaux à -1, donc $S = -n$.
Si $a^2 \neq 1$,

$$S = a\frac{1 - a^{2n}}{1 - a^2}.$$

Correction de l'exercice 4.20

On évalue $y - \sqrt{3}$. On a

$$y - \sqrt{3} = \frac{x + 3 - x\sqrt{3} - \sqrt{3}}{x+1} = (x - \sqrt{3})\frac{1 - \sqrt{3}}{x+1}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < \frac{\sqrt{3}-1}{x+1} < 1$, on obtient immédiatement les deux résultats demandés.