Chapitre 1 : Ensembles, fonctions

(1 cours)

1 Construction d'ensembles

1.1 Ensembles et éléments

Un ensemble est caractérisé par ses éléments. Deux ensembles E et F sont égaux ssi pour tout $x \in E$, $x \in F$ et pour tout $x \in F$, $x \in E$. Attention : penser toujours à prouver les deux sens.
Un ensemble E est inclus dans un ensemble F ssi pour tout $x \in E$, $x \in F$. On dit aussi que E est une partie de F.

1.2 Exemples d'ensembles

$\emptyset$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{R}$, ...

1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Pour un ensemble E, il existe un ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont exactement tous les sous-ensembles de E.
Exemple : $E = \{1, 2, 3\}$. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

1.4 Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une partie de E. On note $A^c = \{x \in E, x \notin A\}$.
Exemple : $E = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}$. Alors $A^c = \{3\}$.

1.5 Union de deux ensembles

Si E et F sont deux ensembles, $E \cup F$ est l'ensemble qui contient exclusivement tous les éléments de E et de F :
pour tout $x \in E \cup F$, $x \in E$ ou $x \in F$
$E \subset E \cup F$ et $F \subset E \cup F$.

1.6 Intersection de deux ensembles

Si E et F sont deux ensembles, $E \cap F$ est l'ensemble qui contient exclusivement les éléments qui sont à la fois dans E et dans F : pour tout x, $x \in E \cap F$ ssi $x \in E$ et $x \in F$.

1.7 Différence de deux ensembles

Si E et F sont deux ensembles, $E \setminus F$ est l'ensemble défini par $E \setminus F = \{x \in E, x \notin F\}$.

1.8 Différence symétrique de deux ensembles

Si E et F sont deux ensembles, $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.

1.9 Couple, triplet, ...

Pour tout x et y, la paire $\{x, y\}$ est l'ensemble contenant exactement x et y. Le couple (x, y) est tel que si $(x, y) = (z, t)$, $x = z$ et $y = t$. (on peut définir le couple (x, y) par exemple par $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$). On définit (x, y, z) par $(x, y, z) = ((x, y), z)$, etc.

1.10 Produit cartésien de deux ensembles

Si E et F sont deux ensembles, $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$.
Si $E = F$, on note $E \times E = E^2$.

1.11 Quantificateurs

Toujours relatifs à un ensemble. Toujours isolés dans une proposition mathématique, et pas dans une phrase.

2 Fonctions

2.1 Définition

Soient E et F deux ensembles. Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est un objet mathématique qui à tout élément de E associe un élément de F. On note alors $f(x)$ l'élément de F associé à l'élément x de E.
Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est un élément de $\mathcal{P}(E \times F)$ tel que :
i) pour tout $(x, y) \in f$ et tout $(z, t) \in f$, si $x = z$ alors $y = t$,
ii) pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ avec $(x, y) \in f$.
Pour tout $x \in E$, on note $f(x)$ l'élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$.
Une fonction est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et par la donnée de $f(x)$ pour tout $x \in E$.
Exemples.

2.2 Composition de fonctions

Soient E, F, G trois ensembles non vides et $f\ : E \longrightarrow F$, $g\ : F \longrightarrow G$. Alors la composition de g et de f, notée $g \circ f$, est définie par $g \circ f\ : E \longrightarrow G$, $x \longrightarrow g(f(x))$.
Attention à l'ordre des fonctions !

2.3 Fonctions injectives ou injections

Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est injective si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$, si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.
Exemples.

2.4 Fonctions surjectives ou surjections

Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ avec $f(x) = y$.
Exemples.

2.5 Fonctions bijectives ou bijections

Soit $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est bijective ssi f est injective et surjective.
Exemples.
Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on note $f^{-1} : F \longrightarrow E$ la fonction réciproque de f, (qui est aussi bijective) définie par $y \mapsto x$ tel que $f(x) = y$.

3 Exercices

3.1 Opérations sur les ensembles

Soient E et F deux ensembles. Montrer que $E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$.

3.2 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble et A, B, C, D des parties de E. Montrer que
i) $A^c \Delta B^c = A \Delta B$
ii) $A \Delta B = \emptyset$ ssi $A = B$
iii) si $A \Delta B = A \Delta C$ alors $B = C$.
iv) si $A \Delta B = A \cap B$ alors $A = B = \emptyset$.

3.3 Opérations sur les ensembles

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que si $A \cup C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A \cap B$, alors $C \subset B$.

3.4 Fonctions caractéristiques

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on appelle fonction caractéristique de A la fonction :
$\chi_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$
$x \mapsto 1$ si $x \in A$
$x \mapsto 0$ si $x \notin A$.
Soient A, B des parties de E. Montrer que
i) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$,
ii) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$,
iii) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$,
iv) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.
v) que vaut $\chi_{A \Delta B}$?
vi) donner des exemples d'ensembles E et de parties A telles que
- χ_A soit injective,
- χ_A ne soit pas injective,
- χ_A soit surjective.
- χ_A ne soit pas surjective.

3.5 Injections (difficile)

Soit E un ensemble. On veut montrer qu'il n'existe pas d'injection de $\mathcal{P}(E)$ dans E. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il en existe une, notée f.
Soit $A = \{x \in E$, il existe $B \in \mathcal{P}(E), x = f(B)$ et $x \notin B\}$. Montrer que
i) $f(A) \in E$ ne peut pas appartenir à A
ii) que $f(A) \in E$ ne peut pas appartenir à A^c.
En déduire une contradiction.

3.6 Surjections (difficile)

Soit E un ensemble. On veut montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il en existe une, notée f.
Soit $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Montrer que
i) il existe au moins un $y \in E$ tel que $f(y) = A$,
ii) que y ne peut pas appartenir à A,
ii) que y ne peut pas appartenir à A^c.
En déduire une contradiction.

3.7 Injections, surjections et composition

Première partie : soient X, Y, Z trois ensembles et $F\ : X \longrightarrow Y$ et $G\ : Y \longrightarrow Z$ deux fonctions. On note $H\ : X \longrightarrow Z$, $x \mapsto G(F(x))$, l'application composée de F et de G (on note aussi $H = G \circ F$).
i) Montrer que si H est injective, alors F est injective.
ii) Montrer que si H est surjective, alors G est surjective.
iii) Montrer que si G est injective et H surjective, alors F est surjective.
iv) Montrer que si F est surjective et H injective, alors G est injective.
Deuxième partie : soient A, B deux ensembles et $f\ : A \longrightarrow B$ et $g\ : B \longrightarrow A$ deux fonctions, telles que $g \circ f$ est surjective et $f \circ g$ est injective. Montrer, en utilisant la première partie, et en précisant quel résultat de la première partie est utilisé, que f et g sont bijectives.

3.8 Relation d'équivalence

Soient E et F deux ensembles et soit f une fonction quelconque de E dans F. On définit la partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$ par
$\mathcal{R} = \{(x,y) \in E^2, f(x) = f(y)\}$.
i) Que vaut $\mathcal{R}$ dans le cas particulier f injective ?
ii) Montrer que
- pour tout $x \in E$, $(x,x) \in \mathcal{R}$,
- pour tout $(x,y) \in R$, $(y,x) \in \mathcal{R}$,
- pour tout $(x,y,z) \in E^3$, si $(x,y) \in \mathcal{R}$ et $(y,z) \in \mathcal{R}$ alors $(x,z) \in \mathcal{R}$.

On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
iii) On définit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ par $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{P}(E), A \times A \subset \mathcal{R}\}$.
On définit $\tilde{f} : \mathcal{E} \longrightarrow F$,
$A \mapsto f(x)$, où $x \in A$ est quelconque.
Montrer que
- la définition de $\tilde{f}(A)$ ne dépend pas de l'élément $x \in A$ choisi (on dit que la définition est valide),
- que $\tilde{f}$ est injective.

3.9 Injections, surjections

Soit $f : [-1,1] \longrightarrow [0,1]$
$x \mapsto x^2$.
f est-elle injective ? surjective ?
ii) Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$.
g est-elle injective ? surjective ?
iii) Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$
$x \mapsto \cos x$.
h est-elle injective ? surjective ?

3.10 Composition de fonctions

i) La fonction $f\ : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(n,m) \mapsto n-m$ est-elle injective ? surjective ?
ii) Soit $g\ : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^2$, telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g(n) = (n,0)$ si $n \geq 0$ et $g(n) = (0,-n)$ si $n < 0$. La fonction g est-elle injective ? surjective ?
iii) Définir les quatre fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ f$, $g \circ f \circ g$.

4 Correction d'exercices

Correction de l'exercice 3.1

Montrons que $E\Delta F \subset (E \cup F) \setminus (E \cap F)$. Soit $x \in E\Delta F$. Comme $(E \setminus F) \cup (F \setminus E)$, alors $x \in E \setminus F$ ou $x \in F \setminus E$.
Supposons que $x \in E \setminus F$. Alors $x \in E$ et $x \notin F$. Puisque $E \subset E \cup F$, alors $x \in E \cup F$. Comme $x \notin F$, et que $E \cap F \subset F$, alors $x \notin E \cap F$. Donc $x \in (E \cup F) \setminus (E \cap F)$.
Le cas $x \in F \setminus E$ se traite de la même façon, en échangeant les rôles de E et de F. Nous avons donc montré que $E\Delta F \subset (E \cup F) \setminus (E \cap F)$.

Montrons que $(E \cup F) \setminus (E \cap F) \subset E\Delta F$. Soit $x \in (E \cup F) \setminus (E \cap F)$. Alors $x \in E \cup F$ et $x \notin E \cap F$. Donc $x \in E$ ou $x \in F$. Supposons que $x \in E$. Comme $x \notin E \cap F$, alors $x \notin F$. Donc $x \in E \setminus F$ et donc $x \in E\Delta F$. Si nous avions supposé que $x \in F$, en échangeant les rôles de E et de F, nous aurions montré que $x \in F \setminus E$ et donc aussi que $x \in E\Delta F$. Donc $(E \cup F) \setminus (E \cap F) \subset E\Delta F$.

Les deux ensembles $E\Delta F$ et $(E \cup F) \setminus (E \cap F)$ sont donc égaux.

Correction de l'exercice 3.6

i) Par définition d'une fonction surjective, pour tout élément de l'ensemble d'arrivée, il existe un élément de l'ensemble de départ tel que son image par f soit cet élément de l'ensemble d'arrivée. Comme, par construction, $A \subset E$, donc $A \in \mathcal{P}(E)$, A est un élément de l'ensemble d'arrivée. Il existe donc $y \in E$, ensemble de départ de f, tel que $f(y) = A$.

ii) Supposons que $y \in A$. Les éléments de A sont par définition de A tels qu'ils n'appartiennent pas à leur image par f. Donc $y \notin f(y)$. Or $f(y) = A$. Il y a donc contradiction, et donc $y \in A$ est impossible.

iii) supposons que $y \in A^c$, donc que $y \notin A$. Puisque $y \in E$ et que $A = f(y)$, alors $y \notin f(y)$, et donc, par construction de A qui réunit tous les éléments de E qui vérifient la propriété de ne pas appartenir à leur image par f, alors $y \in A$. Il y a donc contradiction, et donc $y \in A^c$ est impossible.

Puisqu'à la fois $y \in A$ et $y \notin A$ sont impossibles, c'est qu'un tel y ne peut pas exister, et la fonction ne peut donc pas être surjective.

Correction de l'exercice 3.7

Première partie :
i) Soient x et x' deux éléments de X tels que $F(x) = F(x')$. On a alors, en prenant l'image par G, $G(F(x)) = G(F(x'))$ donc $H(x) = H(x')$. La fonction H étant injective par hypothèse, on a donc $x = x'$. Cela prouve donc que F est injective.

ii) Soit $z \in Z$. Comme H est surjective, il existe $x \in X$ tel que $z = H(x) = G(F(x))$. En posant $y = F(x) \in Y$, on a donc $z = G(y)$, ce qui montre que z a au moins un antécédent par G, et donc que G est surjective.
iii) Soit $y \in Y$. On a $G(y) \in Z$. Comme H est surjective, il existe $x \in X$ tel que $H(x) = G(y)$, donc $G(F(x)) = G(y)$. Comme G est injective, on a donc $y = F(x)$, ce qui prouve que F est surjective.
iv) Soient y et y' des éléments de Y tels que $G(y) = G(y')$. Comme F est surjective, il existe $(x, x') \in X^2$ tels que $y = F(x)$ et $y' = F(x')$. On a alors $H(x) = G(y)$ et $H(x') = G(y')$ donc $H(x) = H(x')$. Comme H est injective, alors $x = x'$ et donc $F(x) = F(x')$, donc $y = y'$. La fonction G est donc injective.
Deuxième partie :
En prenant $X = A$, $Y = B$, $Z = A$, $F = f$, $G = g$ et en appliquant ii) puisque $g \circ f$ est surjective, on obtient g surjective.
En prenant $X = B$, $Y = A$, $Z = B$, $F = g$, $G = f$ et en appliquant iv) puisque $f \circ g$ est injective et g est surjective, on obtient f injective.
En prenant $X = B$, $Y = A$, $Z = B$, $F = g$, $G = f$ et en appliquant i) puisque $f \circ g$ est injective, on obtient g injective.
En prenant $X = A$, $Y = B$, $Z = A$, $F = f$, $G = g$ et en appliquant iii) puisque $g \circ f$ est surjective et g est injective, on obtient f surjective.
Les deux fonctions f et g sont donc bijectives.

Correction de l'exercice 3.9

i) La fonction f vérifie $f(1) = f(-1) = 1$. Il existe donc deux éléments de l'ensemble de départ ($[-1, 1]$ qui sont différents et qui ont la même image par f. La fonction f n'est donc pas injective.
Soit $y \in [0, 1]$. Le nombre y étant positif ou nul, il posséde une racine carrée. On a alors $f(\sqrt{y}) = y$ et de plus $\sqrt{y} \in [-1, 1]$. Tout élément de l'ensemble d'arrivée ayant au moins un antécédent, la fonction f est donc surjective.
ii) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, tel que $g(x) = g(y)$. On a donc $x^2 - y^2 = 0$ donc $(x - y)(x + y) = 0$ donc $x = y$ ou $x = -y$. Les nombres x et y étant positifs ou nuls, on ne peut avoir $x = -y$ que si $x = y = 0$. Donc $x = y$. La fonction est donc injective.
Comme la valeur $-1 \in \mathbb{R}$, l'ensemble d'arrivée, et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $x^2 \geq 0$, on ne peut pas avoir $x^2 = -1$. Le nombre -1 n'a donc pas d'antécédent par g, qui n'est donc pas surjective.
iii) Les valeurs $\pi/2$ et $-\pi/2$ ont la même image par la fonction h (la valeur 0) et sont différentes. La fonction h n'est donc pas injective.
Pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe un réel acos$y \in [0, \pi]$ tel que cos(acos y) $= y$. Tout élément de l'ensemble d'arrivée posséde donc au moins un antécédent (en fait, une infinité). La fonction h est donc surjective.

Correction de l'exercice 3.10

i) Les couples $(1, 1)$ et $(2, 2)$ sont différents, mais ils ont la même image 0 par f. La fonction f n'est donc pas injective.
Soit $n \in \mathbb{Z}$:
* Si $n \geq 0$, alors $n \in \mathbb{N}$ et $f(n, 0) = n$.
* Si $n < 0$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et $f(0, -n) = 0 - (-n) = n$.
Donc dans tous les cas, n possède au moins un antécédent par f. La fonction f est donc surjective.
ii) Soient n et m deux entiers relatifs, tels que $g(n) = g(m)$.
* Supposons $n \geq 0$: alors $g(n) = (n, 0)$. Sous l'hypohèse $m < 0$, on aurait $g(m) = (0, -m) = (n, 0)$, donc $m = 0$. Ce n'est pas possible, donc $m \geq 0$ et $g(m) = (m, 0) = (n, 0)$, donc $m = n$.
* Supposons $n < 0$: alors $g(n) = (0, -n)$. Sous l'hypohèse $m \geq 0$, on aurait $g(m) = (m, 0) = (0, -n)$, donc $n = 0$. Ce n'est pas possible, donc $m < 0$ et $g(m) = (0, -m) = (0, -n)$, donc $m = n$.
Puisque dans tous les cas, $m = n$, la fonction g est donc injective.

Le couple $(1,1)$ n'a pas d'antécédent par g, puisqu'il n'existe pas d'entier relatif n tel que $(1,1)=(n,0)$ ou $(1,1)=(0,-n)$. La fonction g n'est donc pas surjective.
iii) Soit $n \in \mathbb{Z}$.
* Supposons $n \geq 0$. Alors $f \circ g(n) = f(g(n)) = f(n,0) = n - 0 = n$.
* Supposons $n < 0$. Alors $f \circ g(n) = f(g(n)) = f(0,-n) = 0 - (-n) = n$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f \circ g(n) = n$. Donc $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$.
Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.
* Si $n \geq m$, alors $g \circ f(n,m) = g(n-m) = (n-m,0)$.
* Si $n < m$, alors $g \circ f(n,m) = g(n-m) = (0,m-n)$.
Donc la fonction $g \circ f \ : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2$ est définie, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ par $g \circ f(n,m) = (n-m,0)$ si $n \geq m$ et $g \circ f(n,m) = (0,m-n)$ sinon.
Puisque $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$, on a donc $f \circ g \circ f = Id_{\mathbb{Z}} \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g \circ Id_{\mathbb{Z}} = g$.