Université de Montpellier II

BioMath 1 (2004-2005)

Cours: Equations Différentielles

Jérôme Droniou [1].

1 Introduction

Avant d'apprendre à résoudre des équations différentielles, il faut comprendre à quoi cela sert. Voici une tentative de justification.
Considérons la situation d'un scientifique (il peut être biologiste, physicien, chimiste etc...) qui cherche à prédire l'évolution au cours du temps d'une certaine quantité $y(t)$ (qui peut être une population, une concentration de produit, etc...). Bien souvent, par ses connaissances de spécialiste, il est capable de faire des hypothèses sur cette évolution, de décrire un modèle que va suivre la quantité.
Lorsque cette hypothèse consiste à décrire l'évolution de y entre deux instants très proches (du genre "entre t et $t + \Delta t$, avec Δt petit, il y a tant de création de y"), on se rend compte assez vite que la quantité y va satisfaire une équation différentielle, par exemple de la forme $y'(t) + ay(t) = f(t)$ (voir la section 2).
C'est ici que le mathématicien entre en jeu; il peut dire, sachant uniquement que y vérifie l'équation considérée, quelle va être la forme de y; il peut donner une formule pour y ([2]).
Savoir résoudre les équations différentielles permet donc de passer de l'hypothèse qui régissait le comportement de y à une formule explicite pour y; l'évolution de la quantité considérée est alors entièrement connue, comme on le désirait.

Schématiquement, cela donne la chose suivante:

Le Biologiste/Physicien/Chimiste... veut connaitre $y(t)$

$\downarrow$ hypothèse, modèle

y vérifie $y'(t) + ay(t) = f(t)$ (par exemple)

$\downarrow$ résolution

$y(t) = \ldots$ connue

$\downarrow$

Interprétation et/ou prévision possible.

2 Faire un bilan

Dans le schéma ci-dessus, le bilan consiste à passer des hypothèses à l'équation différentielle. Il est important de savoir faire ce bilan tout autant qu'il est important de savoir résoudre l'équation obtenue.

[1] Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. email: `droniou@math.univ-montp2.fr`

[2] Ceci, en fait, n'est vrai que dans les cas simples qui apparaitront dans ce cours; en général, lorsque l'équation différentielle est compliquée, on ne sait pas donner de formule pour y, mais même dans ce cas on est capable dire beaucoup de choses sur cette fonction.

Pour les problèmes qui nous intéressent, un bilan sera l'outil adapté lorsque l'on est clairement capable de dire quels sont, entre deux instants très proches, les gains et pertes de la quantité qu'on veut étudier. Leur forme générale est la suivante (et il est fortement conseillé de toujours écrire une forme générale de ce genre avant de traduire chacun des termes avec les notations et hypothèses du cas particulier que l'on étudie):

Quantité présente à l'instant $t + \Delta t$	$=$	Quantité présente présente à l'instant t	$+$	Quantité gagnée entre les instants t et $t + \Delta t$	$-$	Quantité perdue entre les instants t et $t + \Delta t$.

Ensuite seulement, on met en dessous de chaque terme les expressions mathématiques qui correspondent au problème étudié. Par exemple, si le problème consiste à étudier une quantité $q(t)$ dont on sait que, entre deux instants t et $t + \Delta t$, la quantité gagnée est $G(t)\Delta t$ et la quantité perdue est $P(t)\Delta t$, alors on trouvera

$$q(t + \Delta t) = q(t) + G(t)\Delta t - P(t)\Delta t.$$

Pour obtenir alors l'équation différentielle satisfaite par $q(t)$, on passe à

$$\frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = G(t) - P(t)$$

et, lorsque $\Delta t \to 0$, comme le membre de gauche tend vers $q'(t)$ par définition de la dérivée, on trouve

$$q'(t) = G(t) - P(t).$$

A noter — voir les différents exercices de modélisation traités — que, bien souvent, G et/ou P seront eux-mêmes donnés en fonction de q et que l'équation que l'on obtient est donc bien une équation différentielle liant q' et q.

3 Equations linéaires

3.1 Méthode de résolution de $y'(t) + ay(t) = f(t)$

Nous présentons ici la méthode générale pour résoudre une équation de la forme

$$y'(t) + ay(t) = f(t) \tag{1}$$

où a est une constante et f est une fonction, toutes deux connues.
Que signifie "résoudre" l'équation? Cela signifie "chercher **toutes** les fonctions y qui vérifient (1)".

La méthode générale comporte trois étapes:

1) On cherche toutes les solutions de l'équation obtenue en supprimant f (dite "équation homogène"): les fonctions y_1 solutions de $y_1'(t) + ay_1(t) = 0$.

   Il n'y a rien à faire ici, on connait leur forme: les solutions de cette équation homogène sont de la forme $y_1(t) = Ce^{-at}$ où C est une constante quelconque.

2) On cherche *une* solution particulière de l'équation : une fonction y_0 qui vérifie $y_0'(t) + ay_0(t) = f(t)$.

   Ici, il y a deux méthodes : soit on a l'intuition d'un y_0 simple (par exemple constant ou affine) qui est solution de l'équation, et on l'exhibe, soit on utilise la méthode de variation de la constante (voir section 3.2).

3) On conclut: les solutions de (1) sont de la forme $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ avec y_0 la solution de l'équation trouvée dans l'étape 2 et y_1 une solution de l'équation homogène considérée dans l'étape 1.

3.2 Variation de la constante : trouver une solution particulière

La méthode de variation de la constante est une méthode générale pour essayer de trouver une solution particulière y_0 dans l'étape 2 de la méthode ci-dessus.

Elle fonctionne de la manière suivante: on sait que la forme des solutions de l'équation homogène (sans $f(t)$) est Ce^{-at} avec C constante.

> On va donc chercher une solution particulière de $y_0'(t) + ay_0(t) = f(t)$ sous la forme $y_0(t) = D(t)e^{-at}$, avec $D(t)$ une fonction (on a remplacé la constante par une fonction).

On calcule alors, par dérivation d'un produit,

$$y_0'(t) + ay_0(t) = D'(t)e^{-at} + D(t)(-ae^{-at}) + aD(t)e^{-at} = D'(t)e^{-at}$$

et on veut que cette quantité soit égale à $f(t)$. Cela revient à demander que $D'(t) = f(t)e^{at}$, autrement dit que la fonction $D(t)$ soit une primitive de $t \to f(t)e^{at}$.

En conclusion: pour appliquer la méthode de variation de la constante, soit on se souvient qu'on cherche $y_0(t)$ sous la forme $D(t)e^{-at}$ et on refait le calcul précédent pour voir ce que $D(t)$ doit vérifier (ce qui permet de le calculer et de trouver y_0 en multipliant le résultat par e^{-at}), soit on retient directement que

> Une solution particulière de $y_0'(t) + ay_0(t) = f(t)$ est donnée par $y_0(t) = D(t)e^{-at}$ où $D(t)$ est une primitive de $f(t)e^{at}$.

3.3 Cas d'un coefficient a variable

Lorsque l'on considère des équations de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \tag{2}$$

avec a qui est cette fois une fonction (connue), les méthodes générales ne changent pas, on modifie seulement la forme des fonctions manipulées.

La méthode en trois étapes décrite en section 3.1 reste valable, à condition d'effectuer le changement suivant: les solutions du problème homogène $\boxed{y_1'(t) + a(t)y_1(t) = 0}$ sont maintenant de la forme

$$\boxed{y_1(t) = Ce^{-A(t)} \quad \text{avec } A(t) \text{ une primitive de } a(t) \text{ et } C \text{ une constante.}}$$

Pour une preuve de ceci, se reporter aux exercices (on peut vérifier à la main que les y_1 donnés ainsi sont bien solutions de l'équation homogène).

Remarque 1 *Dans le cas où a est constant, on retrouve bien la forme vue en section 3.1. Dans le cas où $a(t)$ est effectivement non-constant, attention à* ne pas écrire *$y_1(t) = Ce^{-a(t)t}$ comme solution... une primitive de $a(t)$ n'est* pas *$a(t)t$ en général.*

La variation de la constante reste aussi valable mais, vu la structure des solutions de l'équation homogène, on cherche maintenant une solution particulière de $\boxed{y_0'(t) + a(t)y_0(t) = f(t)}$ sous la forme

$$\boxed{y_0(t) = D(t)e^{-A(t)} \quad \text{avec } A(t) \text{ une primitive de } a(t).} \tag{3}$$

On peut alors effectuer le même genre de calcul que précécemment, par dérivation de fonctions composées:

$$\begin{aligned} y_0'(t) + a(t)y_0(t) &= D'(t)e^{-A(t)} + D(t)(-A'(t)e^{-A(t)}) + a(t)D(t)e^{-A(t)} \\ &= D'(t)e^{-A(t)} - a(t)D(t)e^{-A(t)} + a(t)D(t)e^{-A(t)} \\ &= D'(t)e^{-A(t)} \end{aligned}$$

et on voit que y_0 est solution lorsque $D'(t)e^{-A(t)} = f(t)$, autrement dit lorsque $D(t)$ est une primitive de $f(t)e^{A(t)}$. Comme précédemment, soit on retient la forme (3) sous laquelle chercher une solution particulière puis on fait le calcul qui précède afin de savoir ce que $D(t)$ doit vérifier, soit on retient directement:

> Une solution particulière de $y_0'(t) + a(t)y_0(t) = f(t)$ est donnée par $y_0(t) = D(t)e^{-A(t)}$ où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ et $D(t)$ est une primitive de $f(t)e^{A(t)}$.

3.4 Résumé

Pour résumer, en associant la méthode vue en section 3.1, la forme des solutions de l'équation homogène et la forme d'une solution particulière vues en section 3.3, on voit que les solutions de $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ s'écrivent

$$\boxed{y(t) = Ce^{-A(t)} + D(t)e^{-A(t)} \quad \text{avec } A(t) \text{ primitive de } a(t) \text{ et } D(t) \text{ primitive de } f(t)e^{A(t)}}.$$

Il y a donc une constante C qui apparait visiblement, mais d'autres sont cachées: dans le choix des primitives $A(t)$ et $D(t)$. Généralement, on choisit ces primitives qui s'annulent en 0 (cela permet de les fixer et d'éviter de se trimballer trois constantes). Il reste alors à déterminer C en fonction du problème étudié: ceci se fait généralement en connaissant la valeur de y en $t = 0$.

4 Equations non-linéaires: cas des variables séparées

Les équations non-linéaires (qui ne sont pas de la forme (1)) sont en général beaucoup plus dures à résoudre. Nous pouvons cependant indiquer une méthode qui permet d'avoir des renseignements sur les solutions, voire de les calculer dans certains cas simples.

Considérons une équations différentielle à variable séparées:

$$y'(t) = g(t)f(y(t)). \tag{4}$$

En se plaçant sur une zone où f ne s'annule pas, on commence par séparer les variables:

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t).$$

On peut considérer alors une primitive $H(x)$ de la fonction $x \to \frac{1}{f(x)}$ et on voit que, si $y(t)$ reste dans la zone où f ne s'annule pas,

$$(H(y(t)))' = H'(y(t))y'(t) = \frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$$

autrement dit, que $H(y(t))$ est une primitive de $g(t)$; cela signifie que, en notant $G(t)$ une primitive quelconque de $g(t)$ (que l'on peut calculer si g a une forme sympathique), on a $H(y(t)) = G(t) + C$ avec C constante.

En résumé, on a ce renseignement:

> si $y(t)$ est solution de (4) et reste dans un intervalle I où f ne s'annule pas, alors en prenant H une primitive de $\frac{1}{f}$ sur I et G une primitive de g, on a $H(y(t)) = G(t) + C$ pour un C constant.

A noter que l'on n'a pas pour autant, en général, calculé $y(t)$ (donc résolu (4)): tout ce qu'on sait dire, c'est que $H(y(t))$ a une forme connue.
Cependant, dans les cas (fréquents pour nous) où $H : I \to J$ est bijective et où on sait calculer H^{-1}, alors comme $H(y(t)) = G(t) + C$, si $y(t)$ reste dans I et $G(t) + C$ reste dans J, on peut dire que $y(t) = H^{-1}(G(t) + C)$, ce qui donne alors bien une formule pour $y(t)$.

Concrètement, on supposera donc que $y(t)$ reste dans un intervalle I sur lequel f ne s'annule pas, on calculera une primitive H de $1/f$ et une primitive G de g, on écrira $H(y(t)) = G(t) + C$ puis, à partir de cette équation, on tentera d'en déduire une formule pour $y(t)$ (voir les cas particuliers en exercice). On n'oubliera pas ensuite de vérifier que le $y(t)$ qu'on obtient reste bien dans une zone où f ne s'annule pas (on validera notre hypothèse de départ).

5 Annexe: Primitives

A la lecture de ce qui précède, on se rend compte que la notion de primitive est prépondérante dans la résolution d'équations différentielles. Voici quelques rappels à son sujet.

Une primitive d'une fonction f donnée est une fonction F dont la dérivée est f: $F' = f$.
On se rend compte que, si on ajoute une constante quelconque à F, on obtient encore une primitive de f; il n'y a donc pas qu'une seule primitive à une fonction donnée et on a même, de manière précise:

Si F et G sont des primitives de f sur un intervalle I, alors F et G diffèrent d'une constante: il existe C constant tel que $F = G + C$.

Quelques primitives de fonctions usuelles sont à connaitre:

Fonction f	Primitive F
$x \to x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \to \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$	$x \to \ln\|x\|$
$x \to e^x$	$x \to e^x$
$x \to \ln(x)$	$x \to x\ln(x) - x$
$x \to \cos(x)$	$x \to \sin(x)$
$x \to \sin(x)$	$x \to -\cos(x)$
$x \to \frac{1}{1+x^2}$	$x \to \arctan(x)$

Les règles suivantes permettent aussi de se simplifier souvent la vie: si F est une primitive de f et G est une primitive de g alors

- une primitive de $f + g$ est $F + G$
- si C est constant, une primitive de Cf est CF
- si a est constant, une primitive de $x \to f(x + a)$ est $x \to F(x + a)$
- si a est constant non-nul, une primitive de $x \to f(ax)$ est $x \to \frac{1}{a}F(ax)$.

Enfin, quelque chose à retenir car ce genre de primitive intervient souvent dans les résolutions d'équations différentielles: si α est constant non-nul et P est un polynôme de degré n (i.e. $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ avec $a_0, \ldots, a_n$ constants), alors on peut chercher une primitive de $x \to e^{\alpha x}P(x)$ sous la forme $x \to e^{\alpha x}Q(x)$ avec Q polynôme de même degré que P (i.e. $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ avec $b_0, \ldots, b_n$ constants).
Le cas $\alpha = 0$ est trivial.