Université de Montpellier II

BioMath 1 (2004-2005)

Une correction du devoir

Jérôme Droniou [1].

Exercice 1 On note $g(x) = ax^2$ et $h(x) = -bx^3$.

a) On peut élever tout réel x au carré ou au cube. Ainsi, g et h sont définies sur $\mathbb{R}$, et il en est de même pour $f = g + h$.

b) Les fonctions puissances $(x \to x^n)$ sont des fonctions usuelles dont on a admis qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}$. Lorsque l'on multiplie une fonction continue par une constante, on obtient encore une fonction continue: donc g et h sont continues. f est donc continue, en tant que somme $f = g+h$ de fonctions continues.

c) Les fonctions puissances sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et il en est de même pour $f = g + h$ (une somme de fonctions dérivables est dérivable).

On a $f'(x) = g'(x) + h'(x) = 2ax - 3bx^2$.

d) On constate que $f'(x) = 2ax - 3bx^2$ est dérivable, en tant que somme de fonctions dérivables. On a $f''(x) = 2a - 6bx$ et on sait que le signe de f'' détermine les intervalles sur lesquels f est concave ou convexe.

On cherche les x tels que $f''(x) \geq 0$; cela revient à demander $2a - 6bx \geq 0$, soit $6bx \leq 2a$ et, puisque $b > 0$, $x \leq \frac{2a}{6b} = \frac{a}{3b}$. On en déduit que, sur $]-\infty, \frac{a}{3b}]$, f'' est positive et f est convexe, et que, sur $[\frac{a}{3b}, +\infty[$, f'' est négative et f est concave.

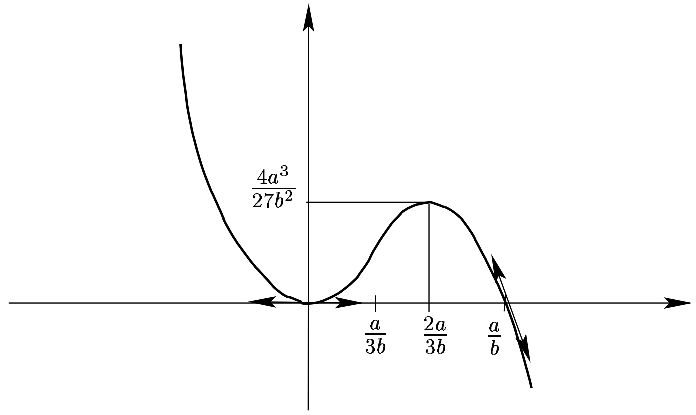
e) Pour tracer f, on étudie d'abord son sens de variation, c'est à dire le signe de $f'(x) = 2ax - 3bx^2 = x(2a - 3bx)$. On connait les signes de x et de $2a - 3bx$ (on a $2a - 3bx \geq 0$ lorsque $3bx \leq 2a$, soit $x \leq \frac{2a}{3b}$ — on constate que $\frac{2a}{3b} > 0$), donc on en déduit le signe de f' et les variations de f:

	$-\infty$		0		$\frac{2a}{3b}$		$+\infty$
x		$-$	|	$+$	|	$+$	
$2a - 3bx$		$+$	|	$+$	|	$-$	
$f'(x)$		$-$	|	$+$	|	$-$	
f		$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	

Pour les limites de f à l'infini, comme f est un polynôme on peut utiliser la règle "le terme de plus haut degré l'emporte": $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-bx^3) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-bx^3) = +\infty$ (à chaque fois, on a utilisé $b > 0$).

On peut aussi calculer les points où f s'annule: $f(x) = x^2(a - bx) = 0$ lorsque $x = 0$ ou $x = \frac{a}{b}$; la pente de la tangente à la courbe en 0 est $f'(0) = 0$, et celle en $\frac{a}{b}$ est $f'(\frac{a}{b}) = -\frac{a^2}{b}$. Ces renseignements, ainsi que les domaines de concavité/convexité de la question précédente, permettent d'obtenir l'allure de la courbe de f.

[1] Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. emails: `droniou@math.univ-montp2.fr`, `dguin@math.univ-montp2.fr`



Exercice 2 Le périmètre est une notion définie pour une figure plane. Lorsque l'on cherche des figures planes sur un cylindre, on voit naturellement le haut et le bas (le couvercle et le fond). Nous prendrons donc comme définition du "périmètre d'un cylindre" le périmètre de sa base circulaire, soit $P = 2\pi r$ si r est le rayon de la base du cylindre.
On veut donc maximiser le volume $V = \pi r^2 h$ (h est la hauteur du cylindre et πr^2 l'aire de sa base) sous la contrainte $h + 2\pi r \leq 100$, c'est à dire $h \leq 100 - 2\pi r$. On constate sur la formule $V = \pi r^2 h$ que plus h est grand, plus le volume sera important: le volume maximal sera donc réalisé pour la hauteur la plus grande possible qui satisfait la contrainte $h \leq 100 - 2\pi r$; cette hauteur est $100 - 2\pi r$.
On a donc $V = \pi r^2(100 - 2\pi r) = 100\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$. On a exprimé V sous la forme d'une fonction d'une variable $f(r) = 100\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$, qui correspond justement à la fonction étudiée dans l'exercice 1 avec $a = 100\pi$ et $b = 2\pi^2$. Cependant, cette fonction ne nous intéresse que pour les $r \geq 0$ (un rayon ne peut être négatif). On cherche donc le maximum de f sur $\mathbb{R}^+$ et, en recopiant la partie concernée du tableau de variation de f:

	0		$\frac{2a}{3b}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\mid$	$\searrow$	

on constate que ce maximum est en $r = \frac{2a}{3b} = \frac{200\pi}{6\pi^2} = \frac{100}{3\pi} \approx 10,61$cm. La hauteur correspondante est alors $100 - 2\pi\frac{100}{3\pi} = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3} \approx 33,33$cm.
On remarque que le rayon et la hauteur obtenus satisfont bien la contrainte $h + 2\pi r \leq 100$ (et même avec égalité, comme on l'a dit dès le début).

Autre argument possible: on pouvait aussi raisonner de la manière suivante (qui évite d'avoir à tracer le tableau de variation de f — donc étudier tous les signes de f' — si on ne l'a pas déjà fait).
On sait que le rayon r doit être positif et, de plus, la contrainte $h + 2\pi r \leq 100$ me dit qu'il doit être inférieur à $\frac{100}{2\pi}$ (si le rayon r prend une valeur supérieure à $\frac{100}{2\pi}$, on aura une hauteur négative...).
On cherche donc le maximum de f sur $[0, \frac{100}{2\pi}]$. Comme f est continue et dérivable (cf exercice 1), on sait qu'il existe un maximum pour f sur l'intervalle borné $[0, \frac{100}{2\pi}]$. Soit ce maximum est l'une des bornes (0 ou $\frac{100}{2\pi}$), soit il est à l'intérieur et, auquel cas, on sait que la dérivée de f doit s'annuler en ce maximum. Comme le seul point dans $]0, \frac{100}{2\pi}[$ où f' s'annule est $r = \frac{2a}{3b} = \frac{100}{3\pi}$ (cf exercice 1), les candidats pour être maxima de f sont: $r = 0$, $r = \frac{100}{3\pi}$ ou $r = \frac{100}{2\pi}$. Mais on constate que $f(0) = f(\frac{100}{2\pi}) = 0$ et que $f(\frac{100}{3\pi}) > 0$, donc le maximum est forcément $r = \frac{100}{3\pi}$.