**Université de Montpellier II**

**Corrigé de l'examen**
**ULMA102 (Biomaths1)**
L1 — 1er semestre

**Session de janvier 2005 — Durée : 2h**

**Exercice 1** On note $N$ et $S$ respectivement les évènements "voiture de qualité normale" et "voiture de qualité supérieure"; on note aussi $D$ et $E$ respectivement les évènements "avoir un défaut" et "ne pas avoir de défaut". L'énoncé se traduit alors de la manière suivante : $P(N) = 2/3$, $P(S) = 1/3$, $P_S(D) = 1/100$ et $P_N(D) = 10/100$.
On cherche à déterminer $P_D(S)$ et $P_D(N)$. On utilise pour cela la formule de Bayes: comme $S$ et $N$ sont des évènements complémentaires (incompatibles, dont l'union représente toutes les voitures) on a

$$P_D(S) = \frac{P_S(D)P(S)}{P_S(D)P(S) + P_N(D)P(N)} = \frac{1/100 \times 1/3}{1/100 \times 1/3 + 10/100 \times 2/3} \approx 4,7\%.$$

Enfin, comme $P_D$ est une probabilité et $S$ et $N$ sont des évènements complémentaires, on en déduit $P_D(N) = 1 - P_D(S) \approx 95,3\%$.

**Exercice 2** i) Le bilan (cf cours) s'écrit: "nombre de poissons à l'instant $t+\Delta t$ = nombre de poissons à l'instant $t$ + nouveaux poissons dûs à la croissance naturelle entre $t$ et $t+\Delta t$ − nombre de poissons pêchés entre $t$ et $t + \Delta t$", ce qui se traduit, vu l'énoncé, par:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + k(t)N(t)\Delta t - Q\Delta t.$$

On trouve alors

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = k(t)N(t) - Q$$

et, en faisant tendre $\Delta t$ vers 0, par définition de la dérivée de $N$, on trouve: $N'(t) = k(t)N(t) - Q$.

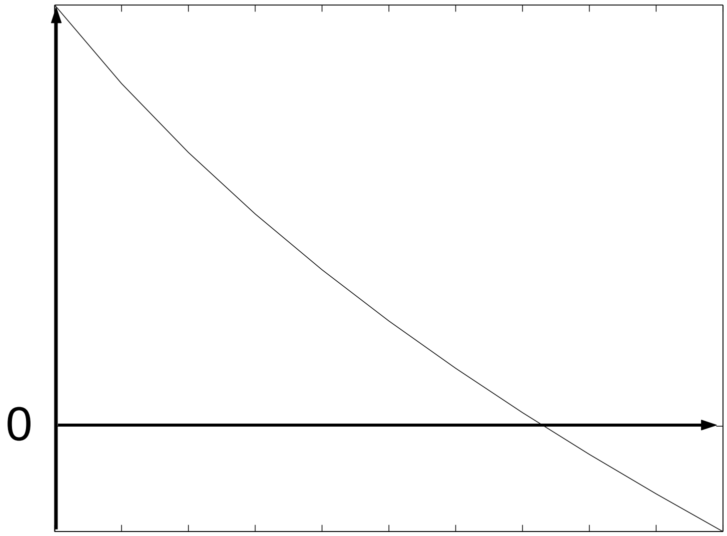
ii) Comme $k(t) = -\frac{1}{1+t}$, on a $N'(t) = -\frac{1}{1+t}N(t) - Q$, soit $N'(t) + \frac{1}{1+t}N(t) = -Q$.

a) Les solutions de l'équation homogène $N_1'(t) + \frac{1}{1+t}N_1(t) = 0$ s'écrivent $N_1(t) = Ce^{-K(t)}$ où $K(t)$ est une primitive de $\frac{1}{1+t}$. On peut donc prendre $K(t) = \ln(|1+t|) = \ln(1+t)$ (car $t \geq 0$), ce qui donne $N_1(t) = Ce^{-\ln(1+t)} = \frac{C}{1+t}$.

b) On cherche une solution particulière $N_0$ de $N_0'(t) + \frac{1}{1+t}N_0(t) = -Q$ sous la forme affine: $N_0(t) = at + b$ avec $a$ et $b$ constants. On doit donc avoir $(at + b)' + \frac{at+b}{1+t} = -Q$, donc $a + \frac{at+b}{1+t} = -Q$, soit encore (en multipliant par $1 + t$): $2at + a + b = -Qt - Q$. On veut que ceci soit vrai pour tout $t$, donc on prend $a$ et $b$ tels que: $2a = -Q$ et $a + b = -Q$. Cela nous donne $a = -Q/2$ et $b = -Q - a = -Q/2$.
La solution particulière s'écrit donc $N_0(t) = -\frac{Q}{2}(1 + t)$ ([1]).

c) La solution générale s'écrit donc $N(t) = \frac{C}{1+t} - \frac{Q}{2}(1 + t)$. On détermine $C$ par la condition initiale $N(0) = N_0$, qui impose $C - \frac{Q}{2} = N_0$, donc $C = \frac{Q}{2} + N_0$, et on conclut que $N(t) = \frac{\frac{Q}{2}+N_0}{1+t} - \frac{Q}{2}(1 + t)$.

On a $N'(t) = -\frac{\frac{Q}{2}+N_0}{(1+t)^2} - \frac{Q}{2}$; la dérivée de $N$ est donc négative (somme de deux termes négatifs) et $N$ est décroissante. De plus, $N(t) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$ (car $\frac{\frac{Q}{2}+N_0}{1+t} \to 0$ et $-\frac{Q}{2}(1 + t) \to -\infty$




lorsque $t \to +\infty$). Si on trace $N$ (éventuellement apres une étude plus poussée), on trouve quelque chose du genre de la courbe ci-dessus.

On constate que $N$ devient négatif, ce qui est très mauvais: le modèle est probablement totalement à revoir (en particulier, le fait que la quantité de poissons que l'on pêche entre deux instants ne dépende que de l'intervalle de temps considéré et non du nombre de poissons présents au moment où l'on pêche).

**Exercice 3** Il faut utiliser la méthode des variables séparées: puisque $y'(t) = ry(t)(1 - y(t))$, on a $y'(t) = g(t)f(y(t))$ avec $g(t) = r$ (fonction constante) et $f(x) = x(1 - x)$.
Il faut calculer une primitive de $g(t)$ ($G(t) = rt$ convient) ainsi qu'une primitive de $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$: $H(x) = \ln(|x|) - \ln(|1 - x|)$ convient ([2]).
Comme on s'attend à ce que $y(t)$ soit positif et (vu que $y(0) = 1/2$) inférieur à 1 (au moins pour les temps proches de l'instant initial), on en déduit $\ln(y(t)) - \ln(1 - y(t)) = rt + C$. On détermine $C$ en utilisant $y(0) = 1/2$; on a donc $\ln(1/2) - \ln(1 - 1/2) = r \times 0 + C$, donc $C = 0$ et $\ln(\frac{y(t)}{1-y(t)}) = \ln(y(t)) - \ln(1 - y(t)) = rt$. On en déduit que $\frac{y(t)}{1-y(t)} = e^{rt}$, donc $y(t) = e^{rt} - e^{rt}y(t)$; on obtient ainsi $y(t)(1 + e^{rt}) = e^{rt}$, soit $y(t) = \frac{e^{rt}}{1+e^{rt}}$.
On peut encore écrire cela comme: $y(t) = \frac{1}{e^{-rt}+1}$ (on a divisé au numérateur et au dénominateur par $e^{rt}$) et on voit que $y(t) \to 1$ lorsque $t \to \infty$. La population se rapproche donc de la capacité biotique du milieu (elle tend à se stabiliser autour de 1).

**Exercice 4** i) Si on coupe le graphe A par un plan $y =$ constante, on obtient une courbe qui a une allure de parabole. Or la fonction partielle pour $y =$ constante correspondante à $f(x, y) = x^3 + y^2$ est la fonction $x \to x^3+$ constante, qui a une allure de fonction cube (donc pas une allure de parabole). La figure A ne peut donc convenir.

Si on coupe la figure C par un plan $x =$ constant, on obtient une courbe qui a l'allure d'une droite, ce qui ne peut pas correspondre à la fonction partielle $x =$ constant de $f$, qui est $y \to y^2+$ constante (et a donc une allure de parabole). La figure $C$ ne peut donc pas correspondre à $f$.

Si on coupe la figure B par un plan $x =$ constant, on obtient une parabole, qui correspond à la fonction partielle $x =$ constant de $f$; de même, si on coupe la figure B par un plan $y =$ constant, on voit apparaitre une courbe qui ressemble a une fonction cube (fonction partielle, à une constante près, de $f$). Il semble donc bien que la figure B soit le graphe correspondant à $f$.

[1] On pouvait aussi obtenir une autre solution particulière par variation de la constante.

[2] Attention à la primitive de $\frac{1}{1-x}$: on la calcule à partir de la primitive de $\frac{1}{1+x}$ en dilatant la variable d'un coefficient $-1$, qu'il ne faut pas oublier de reporter devant la primitive; cf cours.

ii) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y) + 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin(y)$.

Par une formule du cours, on a $w'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))v'(t)$; comme $u'(t) = 3t^2$ et $v'(t) = \cos(t)$, cela donne

$$w'(t) = \left(e^{t^3} \cos(\sin(t)) + 2t^3\right) \times 3t^2 + \left(-e^{t^3} \sin(\sin(t))\right) \times \cos(t).$$