Les chocs et l'entropie

Alain Yves Le Roux
Cours de DEA

Bordeaux, Novembre 1999

1 Les solutions faibles

On a vu, lors d'un exemple au chapitre 1, qu'une solution du problème

$$\begin{array}{c} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{array} \tag{1.1}$$

avec $f \in C^1(\mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ pouvait présenter des discontinuités, qui correspondent à des chocs en mécanique. On a vu également que la caractérisation (ici $Q = \mathbb{R} \times]0,T[$, $T > 0$ et l'indice "zéro" dans $C_0^2(K)$ signifie "à support compact dans K"),

$$\begin{array}{c} \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0,T[), \ \textit{non négative}, \\ \int\int_Q (|u-k|\varphi_t + sg(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x) dxdt \ + \ \int_{\mathbb{R}} |u_0 - k|\varphi(x,0)dx \ \geq \ 0 \ , \end{array} \tag{1.2}$$

assure l'existence et l'unicité d'une solution appartenant à $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$, en faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ dans les résultats précédents (ceci parce que la notion de solution faible est trop ambigue pour intégrer les conditions aux limites "BLN").

Définition 1.1 *Soit $u \in L^\infty(Q)$; on dit que u est solution faible de (1.1) lorsque*

$$\forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0,T[) \quad \int\int_Q (u\varphi_t + f(u)\varphi_x)dxdt \ + \ \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(x,0)dx \ = \ 0 \ . \tag{1.3}$$

Remarquons qu'on n'exige plus $\varphi \geq 0$, et que cette définition peut être étendue à $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ lorsque $f(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$. On perd alors la notion de trace, et il devient plus difficile d'interpréter les conditions aux limites dans le cas général.

Proposition 1.2 *Soit $u \in L^\infty(Q)$ vérifiant la caractérisation (1.2) ; alors u est une solution faible de (1.1).*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0,T[)$, non négative et $k \in \mathbb{R}$. On a

$$\int\int_Q k \, \varphi_t \, dx \, dt \ = \ -k \int \varphi(x,0) \, dx \ ,$$

et

$$\int\int_Q f(k) \, \varphi_x \, dx \, dt \ = \ 0 \ .$$

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

On prend $k > \left|u\right|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ dans (1.2), et on intègre par parties, pour obtenir

$$\int\int_Q (k\varphi_t + f(k)\varphi_x) dxdt \; - \; \int\int_Q (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dxdt \; + \; \int_{\mathbb{R}} (k - u_0)\varphi(x,0) dx \; \geq \; 0 \; .$$

d'où

$$\int\int_Q (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) \; dxdt \; + \; \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \; \varphi(x,0) \; dx \; \leq \; 0 \; .$$

On prend ensuite $k < -\left|u\right|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, pour obtenir

$$\int\int_Q (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) \; dxdt \; + \; \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \; \varphi(x,0) \; dx \; \geq \; 0 \; .$$

On en déduit que u vérifie (1.3) pour toute fonction $\varphi \geq 0$ appartenant à $C_0^2(\mathbb{R} \times [0,T[)$, et en multipliant par "-1", que ceci reste vrai pour toute fonction de signe constant (soit ≥ 0, soit ≤ 0). Par linéarité sur φ, ceci reste encore vrai pour toute combinaison linéaire de fonctions φ de signe constant. En prenant maintenant $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0,T[)$, puis $\chi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0,T[)$ égale à 1 sur le support de φ. (ainsi $\varphi = \chi\varphi$), et en remarquant que $\varphi = \chi\varphi = \frac{1}{2}\Big(\chi^2 + \varphi^2 - (\chi - \varphi)\Big)^2$, on en déduit immédiatement (1.3) pour toute fonction $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0,T[)$.

Remarquons aussi que l'hypothèse $u \in L^\infty(Q)$ a été utilisée de façon fondamentale, en prenant $k > \left|u\right|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ puis $k < -\left|u\right|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Si on a simplement $u \in L^1_{loc}(Q)$, ces choix ne sont plus possibles, et il n'est donc plus possible de transformer l'inégalité (1.2) en une égalité correspondant à (1.3).

2 La relation de Rankine Hugoniot

Soit u une solution faible de (1.1). On suppose que u présente une discontinuité (aussi appelée choc) le long d'une courbe S , de classe C^1, admettant une équation de la forme $x = x(t)$.

On note $t_1 = \mathrm{Inf}\{t \; |(x, x(t) \in S\}$ et $t_2 = \mathrm{Min}(\mathrm{T}, \mathrm{Sup}\{t \; |(x, x(t) \in S\})$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times]t_1, t_2[$, contenant au moins un point de S. On peut effectuer une partition de $\Omega \backslash S$ en deux ouverts $\Omega_1 = \{(x,t) \in \Omega \; |x < x(t)\}$ et $\Omega_2 = \{(x,t) \in \Omega \; |x > x(t)\}$. On note $u_1 = u|_{\Omega_1}$, $u_2 = u|_{\Omega_2}$, et on suppose que $u_1 \in C^1(\Omega_1)$, $u_2 \in C^1(\Omega_2)$, avec des traces continues sur S. On note enfin $n = (n_x, n_t)$ la normale extérieure à Ω_1.

Soit $\varphi \in C_0^2(\Omega_1)$. On a, puisque u est solution faible,

$$\int\int_{\Omega_1} (\; u_1\varphi_t \; + \; f(u_1)\varphi_x \;) \; dx \; dt \;\; = \;\; 0 \; .$$

On peut intégrer par parties, et obtenir

$$\forall\varphi \in C_0^2(\Omega_1) \qquad \int\int_{\Omega_1} (u_{1,t} + \; f(u_1)_x) \; \varphi \; dx \; dt \; = \; 0 \; ,$$

D'où u_1 est une solution au sens classique de (1.1) sur Ω_1. En procédant de la même façon sur Ω_2, on établit aussi que u_2 est une solution au sens classique de (1.1) sur Ω_2.

On prend maintenant $\varphi \in C_0^2(\Omega)$. Comme u est solution faible, on a

$$\int\int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) \, dx \, dt = 0 .$$

On intègre par parties sur Ω_1 et sur Ω_2, pour obtenir

$$\int\int_{\Omega_1} (u_t + f(u)_x)\varphi dxdt + \int\int_{\Omega_2} (u_t + f(u)_x)\varphi dxdt + \int_S ((u_1 - u_2)n_t + (f(u_1) - f(u_2))n_x)\varphi ds = 0$$

Comme u vérifie (1.1) sur Ω_1 et sur Ω_2, il reste

$$\forall \varphi \in C_0^2(\Omega) \quad \int_S ((u_1 - u_2)n_t + (f(u_1) - f(u_2))n_x) \, \varphi(x,t) \, ds = 0$$

dont on déduit

$$(u_1 - u_2)n_t + (f(u_1) - f(u_2))n_x = 0 .$$

Or la normale n est colinéaire au vecteur $(1, -x'(t))$, (et de même sens). En multipliant par un coefficient adapté, on obtient la **Relation de Rankine Hugoniot**

$$(u_1 - u_2)x'(t) = f(u_1) - f(u_2) . \tag{2.1}$$

Cette relation est valable en tout point d'une courbe de choc, et permet de déterminer la trajectoire de ce choc.

Réciproquement, toute fonction u bornée sur $\mathbb{R}\times]0,T[$, qui est solution au sens classique de (1.1) sauf sur un nombre fini de courbes de discontinuité, où elle vérifie (2.1), est une solution faible de (1.1). Il suffit, pour l'établir, de prodéder, en sens inverse, aux intégrations par parties précédentes, la relation (2.1) annulant l'intégrale curviligne sur les courbes de discontinuité.

3 La condition d'entropie d'Oleinik

Il n'y a pas unicité pour les solutions faibles de (1.1). Pour le démontrer, il suffit de produire un contre exemple. Prenons l'équation de Burgers, c'est à dire (1.1) avec $f(u) = \frac{u^2}{2}$, et la condition initiale

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 \;\; si \; x > 0 \, , \\ -1 \; si \; x < 0 \, . \end{cases}$$

Les deux fonctions suivantes sont solutions faibles :

$$u_1(x,t) = u(x,0) = \begin{cases} 1 \;\; si \; x > 0 \, , \\ -1 \; si \; x < 0 \, . \end{cases}$$

et

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 1 & si \; x > t \, , \\ x/t & si \; -t \leq x \leq t \, , \\ -1 & si \; x < -t \quad . \end{cases}$$

On peut remarquer que cette dernière est continue, et qu'elle correspond à la solution sélectionnée par la formule de Hopf et Lax (voir Chapitre 1). De plus, elle vérifie la caractérisation proposée au chapitre 2, et reprise plus bas (3.1) ; c'est donc cette solution que l'on souhaite retenir.

On peut en fait construire une infinité de solutions. Prenons $\alpha \in [0,1]$ et

$$u_\alpha(x,t) \;=\; \begin{cases} 1 & si\ x > t, \\ x/t & si\ \alpha t < x \le t, \\ \alpha & si\ 0 < x < \alpha t, \\ -\alpha & si\ -\alpha t < x < 0, \\ x/t & si\ -t \le x < -\alpha t, \\ -1 & si\ x < -t\ . \end{cases}$$

et compliquer encore ce contre exemple en réinjectant une solution du même type, après un instant $t_1 > 0$, au niveau de la discontinuité en $x = 0$, pour un paramètre $\alpha_1 \in [0, \alpha]$ si $\alpha > 0$, puis recommencer après un instant $t_2 > t_1$, encore au niveau de la discontinuité en $x = 0$, pour un paramètre $\alpha_2 \in [0, \alpha_1]$ si $\alpha_1 > 0$, etc...

On se propose maintenant de construire un critère similaire à (2.1) sur les courbes de choc, mais suffisant pour sélectionner la solution caractérisée par

$$\begin{array}{c} \forall k \in \mathbb{R}\ \forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0,T[) \\ \int_0^\infty \int_{\mathrm{R}} (|u-k|\varphi_t + sg(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x) dxdt \;+\; \int_{\mathrm{R}} |u_0 - k|\varphi(x,0)dx \;\ge\; 0\ . \end{array} \tag{3.1}$$

Soit u une solution vérifiant (3.1) et présentant une discontinuité (choc) le long d'une courbe S, de classe C^1, admettant une équation de la forme $x = x(t)$.

On note comme précédemment $t_1 = \mathrm{Inf}\{t\ |(x, x(t) \in S\}$ et $t_2 = \mathrm{Min}(\mathrm{T}, \mathrm{Sup}\{t\ |(x, x(t) \in S\})$. On introduit un ouvert Ω de $\mathbb{R}\times]t_1, t_2[$, contenant au moins un point de S et on effectue une partition de $\Omega \backslash S$ en deux ouverts $\Omega_1 = \{(x,t) \in \Omega\ |x < x(t)\}$ et $\Omega_2 = \{(x,t) \in \Omega\ |x > x(t)\}$. On note $u_1 = u|_{\Omega_1}$, $u_2 = u|_{\Omega_2}$, et on suppose que $u_1 \in C^1(\Omega_1)$, $u_2 \in C^1(\Omega_2)$, avec des traces continues sur S. On note enfin $n = (n_x, n_t)$ la normale extérieure à Ω_1.

Soit $\varphi \in C_0^2(\Omega_1)$, $\varphi \ge 0$, et $k \in \mathbb{R}$. On a, puisque u vérifie (3.1),

$$\int\int_{\Omega_1} (\ |u_1 - k|\varphi_t \;+\; sg(u_1-k)(f(u_1)-f(k))\varphi_x\ )\ dx\ dt \quad\ge\quad 0\ .$$

On peut intégrer par parties, et obtenir

$$\forall \varphi \in C_0^2(\Omega_1),\ \forall k \in \mathbb{R} \quad \int\int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}|u_1 - k| + \frac{\partial}{\partial x} sg(u_1-k)(f(u_1)-f(k)) \right) \varphi\ dxdt \;\le\; 0\ ,$$

D'où u_1 est une solution au sens classique de

$$\frac{\partial}{\partial t}|u_1 - k| \;+\; \frac{\partial}{\partial x}\left(sg(u_1-k)(f(u_1)-f(k))\right) \;\le\; 0\ , \tag{3.2}$$

sur Ω_1. En procédant de la même façon sur Ω_2, on établit aussi que u_2 est une solution au sens classique de

$$\frac{\partial}{\partial t}|u_2 - k| \;+\; \frac{\partial}{\partial x}\left(sg(u_2-k)(f(u_{21})-f(k))\right) \;\le\; 0\ , \tag{3.3}$$

sur Ω_2.

On prend maintenant $\varphi \in C_0^2(\Omega)$. Comme u vérifie (3.1), on a

$$\int\int_{\Omega} (\, |u-k|\varphi_t \; + \; sg(u-k)(f(u)-f(k))\varphi_x \,) \, dx \; dt \quad \geq \quad 0 \; .$$

On intègre par parties sur Ω_1 et sur Ω_2, pour obtenir, $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\int\int_{\Omega_1} \Big(|u-k|_t + \tfrac{\partial}{\partial x}(sg(u-k)(f(u)-f(k))\Big)\varphi dx dt + \int\int_{\Omega_2} \Big(|u-k|_t + \tfrac{\partial}{\partial x}(sg(u-k)(f(u)-f(k)))\Big)\varphi dx dt$$
$$+ \int_S ((|u_1-k| - |u_2-k|)n_t + (sg(u_1-k)(f(u_1)-f(k)) - sg(u_2-k)(f(u_2)-f(k)))n_x)\varphi ds \;\geq\; 0$$

Comme u vérifie (3.2) sur Ω_1 et (3.3) sur Ω_2, il reste, $\forall \varphi \geq 0$, $\forall k$

$$\int_S ((|u_1-k| - |u_2-k|)n_t + (sg(u_1-k)(f(u_1)-k(k)) - sg(u_2-k)(f(u_2)-f(k)))n_x)\varphi ds \;\geq\; 0$$

dont on déduit

$$(|u_1-k| - |u_2-k|)n_t \; + \; (sg(u_1-k)(f(u_1)-f(k)) - sg(u_2-k)(f(u_2)-f(k)))n_x \;\geq\; 0 \; .$$

Or la normale n est colinéaire au vecteur $(1, -x'(t))$, (et de même sens). En multipliant par un coefficient adapté, on obtient en tout point de S, la relation

$$(|u_1-k| - |u_2-k|)x'(t) \;\leq\; (sg(u_1-k)(f(u_1)-f(k)) - sg(u_2-k)(f(u_2)-f(k))) \; .$$

On prend succèssivement $k > \max(u_1, u_2)$ puis $k < \min(u_1, u_2)$ pour obtenir

$$f(u_1) - f(u_2) \;\leq\; (u_1-u_2)x'(t) \;\leq\; (f(u_1)-f(u_2)) \; ,$$

c'est à dire la relation de Rankine Hugoniot (2.1).

On prend ensuite k entre u_1 et u_2, et il vient

$$sg(u_2-u_1)(u_2+u_1-2k)x'(t) \;\geq\; sg(u_2-u_1)(f(u_1)+f(u_2)-2f(k)). \tag{3.4}$$

Or, puisque la relation de Rankine Hugoniot est acquise,

$$x'(t) \;=\; \frac{f(u_2)-f(u_1)}{u_2-u_1} \; ,$$

et on en déduit

$$(f(u_2)-f(u_1))(u_1-k) \; + \; (f(k)-f(u_1))(u_2-u_1) \;\geq\; 0 \; .$$

On divise par $(u_2-u_1)(k-u_1)$ (≥ 0), pour obtenir la **condition d'entropie d'Oleinik**

$$\forall k \text{ entre } u_1 \text{ et } u_2, \quad \frac{f(u_2)-f(u_1)}{u_2-u_1} \;\leq\; \frac{f(k)-f(u_1)}{k\;-u_1} \; . \tag{3.5}$$

Pour $u_1 > u_2$, cette condition se traduit par

$$f(k) \;\leq\; f(u_1) \; + \; (f(u_2)-f(u_1))\,\frac{k\;-u_1}{u_2-u_1} \; ,$$

qui exprime que le graghe de f est situé au dessous de sa sécante construite sur l'intervalle $[u_2, u_1]$. Ceci sera vérifié en particulier si f est convexe.

Pour $u_1 < u_2$, cette condition se traduit par

$$f(k) \;\geq\; f(u_1) \; + \; (f(u_2)-f(u_1))\,\frac{k\;-u_1}{u_2-u_1} \; ,$$

qui exprime que le graghe de f est situé au dessus de sa sécante construite sur l'intervalle $[u_1, u_2]$. Ceci sera vérifié en particulier si f est concave.

3.1 Y a t'il Unicité de la solution faible vérifiant la condition d'entropie (3.5) ?

La réponse est **négative** dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}\times]0,T[)$, comme le montre le contre exemple suivant

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} \frac{x}{t} & \text{si } t > x^2 \,, \\ 0 \text{ sinon} \,. \end{cases} \tag{3.6}$$

et

$$v(x,t) \;=\; 0 \;,$$

sont bien deux solutions faibles différentes de l'équation de Burgers ($f(u) = \frac{u^2}{2}$) avec la condition initiale $u(x,0) = 0$. Il est bien évident que u définie par (3.6) vérifie la condition d'entropie (les discontinuités sont décroissantes, f étant convexe).

La réponse est cependant **positive** si on se limite aux solutions bornées. Ceci se comprend bien car on a dû prendre, à plusieurs reprises $k > \left|u\right|_{L^\infty}$ ou $k < -\left|u\right|_{L^\infty}$ pour obtenir l'unicité, ou montrer que la solution caractérisée par (3.1) est bien solution faible. On peut revenir à la formulation (3.1) en effectuant en sens inverse la démarche précédente (les intégrations par parties) à partir d'un fonction $\varphi \geq 0$, et d'une solution u vérifiant la condition d'entropie (3.5) sur les lignes de discontinuité, et suffisamment régulière par ailleurs.

4 Le problème de Riemann

Ce problème est très important pour ses applications pratiques, pour la construction de schémas numériques notamment. Sa résolution utilise le fait que les constantes sont toujours solutions de l'équation homogène.

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. On se donne deux constantes réelles u_g et u_d, et on se propose d'expliciter la solution du problème de Riemann sur $\mathbb{R}\times]0,T[$

$$\begin{aligned} u_t \;+\; f(u)_x \;&=\; 0 \;\;, \\ u(x,0) \;&=\; \begin{cases} u_g & si\ x < 0, \\ u_d & si\ x > 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1}$$

qui soit bornée et caractérisée par (3.1).

On sait, d'après l'étude du chapitre précédent, que la solution conserve la même variation que celle de la condition initiale. Ainsi, pour $u_g < u_d$, elle est non décroissante, et pour $u_d < u_g$, elle est non croissante.

4.1 Analyses de cas particuliers

Dans le cas où f est affine (notons $f(u) = cu + d$), en utilisant les caractéristiques, on obtient l'explicitation suivante de la solution

$$u(x,t) \;=\; u(x-ct,0) \;=\; \begin{cases} u_g & si\ x < ct, \\ u_d & si\ x > ct. \end{cases}$$

La condition d'entropie d'Oleinik (3.5) est alors trivialement vérifiée.

Dans le cas où f est convexe, et si $u_g < u_d$, on doit envisager l'apparition d'une détente. En effet, on a vu qu'une détente pouvait se formuler à partir de l'expression $f'(u) = \frac{x}{t}$, qui donne en dérivant

$$f''(u)\, u_x \;=\; \frac{1}{t} \;>\; 0\;. \tag{4.2}$$

Pour f convexe, on se rend compte qu'il est indispensable d'avoir une solution croissante ($u_x > 0$). Si au contraire $u_d < u_g$, alors la condition d'entropie d'Oleinik (3.5) garantit un choc compatible avec la caractérisation (3.1). On obtient finalement l'explicitation suivante de la solution, en notant $g = (f')^{-1}$:

Pour $u_g < u_d$,

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_g & si\ x < f'(u_g)t\ , \\ g(\frac{x}{t}) & si\ f'(u_g)t < x < f'(u_d)t\ , \\ u_d & si\ x > f'(u_d)t\ . \end{cases}$$

Pour $u_g > u_d$,

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_g & si\ x \;<\; \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g}\, t\ , \\ u_d & si\ x \;>\; \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g}\, t\ . \end{cases}$$

Dans le cas $u_g < u_d$, la solution est continue tant que f est strictement convexe, et si le graphe de f présente un segment rectiligne sur un intervalle (maximal) $[u_1, u_2]$, la solution présente une discontinuité compatible avec la condition d'entropie d'Oleinik (3.5). En effet, pour tout $k \in [u_1, u_2]$, la quantité $\dfrac{f(k)-f(u_1)}{k-u_1}$ reste constante, et a fortiori égale (donc $\geq$) à $\dfrac{f(u_2)-f(u_1)}{u_2-u_1}$, et les vitesses caractéristiques de part et d'autre de cette discontinuité sont confondues : $f'(u_1) = f'(u_2)$.
Dans le cas $u_g > u_d$, le choc est bien compatible avec (3.1). En effet, pour $k < u_g$,

$$f'(k) \;\leq\; \frac{f(k)-f(u_g)}{k-u_g}\ ,$$

donc

$$(k-u_g)\, f'(k) \;\geq\; f(k)-f(u_g)\ ,$$

et la fonction $k \longmapsto \dfrac{f(k)-f(u_g)}{k-u_g}$ est croissante sur $[u_d, u_g]$. En particulier

$$\frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g} \;=\; \operatorname*{Inf}_{u_d<k<u_g} \frac{f(k)-f(u_g)}{k-u_g}\ , \tag{4.3}$$

qui correspond à la condition d'entropie (3.5).

Dans le cas où f est concave, on se ramène au cas précédent en changeant x en $-x$ dans (4.1). On obtient ainsi une détente pour $u_g > u_d$ et un choc pour $u_g < u_d$. Plus précisément, avec $g = (f')^{-1}$,
Pour $u_g > u_d$,

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_g & si\ x < f'(u_g)t\ , \\ g(\frac{x}{t}) & si\ f'(u_g)t < x < f'(u_d)t\ , \\ u_d & si\ x > f'(u_d)t\ . \end{cases}$$

Pour $u_g < u_d$,

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_g & si\ x \;<\; \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g}\, t\ , \\ u_d & si\ x \;>\; \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g}\, t\ . \end{cases}$$

4.2 Le cas général

Dans le cas général, on distingue séparément les deux cas $u_g < u_d$ et $u_g > u_d$.

Pour $u_g < u_d$, on note $\tilde{f}$ l'enveloppe convexe de f sur $[u_g, u_d]$, et on considère la solution $\tilde{u}$ de

$$\tilde{u}_t + \tilde{f}(\tilde{u})_x = 0 \quad , \quad \tilde{u}(x,0) = \begin{cases} u_g & si \;\; x < 0, \\ u_d & si \;\; x > 0. \end{cases}$$

Cette solution est donnée par

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} & u_g \quad si \; x < \tilde{f}'(u_g)t \;\; , \\ \tilde{g}(\frac{x}{t}) & \quad si \; \tilde{f}'(u_g)t < x < \tilde{f}'(u_d)t \;, \\ & u_d \quad si \; x > \tilde{f}'(u_d)t \;\; , \end{cases} \tag{4.4}$$

où $\tilde{g} = (\tilde{f}')^{-1}$. On compare cette solution et celle de (4.1) . Lorsque le graphe de $\tilde{f}$ comporte un segment rectiligne, il y a un choc compatible avec la condition d'entropie d'Oleinik (3.5). Dans les autres cas (ce qui correspond à dire pour presque tout $x \in \mathbb{R}$), les graphes de f et de $\tilde{f}$ coïncident et soit $f' = \tilde{f}'$, donc $g = \tilde{g}$, et u et $\tilde{u}$ sont strictement croissantes et coïncident, soit u et $\tilde{u}$ sont constantes (valant soit u_g, soit u_d) et coïncident également.

Pour $u_g > u_d$, on note $\tilde{f}$ l'enveloppe concave de f sur $[u_d, u_g]$, et par les mêmes arguments, on vérifie que la solution $\tilde{u}$ de (4.3), toujours donnée par (4.4) où $\tilde{g} = (\tilde{f}')^{-1}$, et la solution u de (4.1) coïncident et sont non croissantes.

4.3 les valeurs stationnaires en $x = 0, \;\; t > 0$

On note

$$I(u_g, u_d) = [\; \mathrm{Inf}(u_g, u_d), \; \mathrm{Sup}(u_g, u_d) \;]$$

l'intervalle limité par u_g et u_d, puis $\tilde{f}$ l'enveloppe convexe de f sur $I(u_g, u_d)$ si $u_g < u_d$, ou l'enveloppe concave de f sur $I(u_g, u_d)$ si $u_g > u_d$.

On définit ensuite l'ensemble $I_*(u_g, u_d) \subset I(u_g, u_d)$, par

$$v \in I_*(u_g, u_d) \;\Leftrightarrow\; sg(u_d - u_g)\tilde{f}(v) = \underset{k \in I(u_g,u_d)}{\mathrm{Inf}} \Big(sg(u_d - u_g)\tilde{f}(k) \Big) \;. \tag{4.5}$$

Comme $\tilde{f}$ est soit convexe, soit concave, $I_*(u_g, u_d)$ est un intervalle fermé. On le note $I(u_l, u_r)$, avec $u_l \leq u_r$ si $u_g < u_d$, et $u_l \geq u_r$ sinon. On remarque que

$$f(u_l) = \tilde{f}(u_l) = \tilde{f}(u_r) = f(u_r) \;,$$

et que $I(u_g, u_d) = I(u_g, u_l) \cup I(u_l, u_r) \cup I(u_r, u_d)$. Sur $I(u_g, u_l)$, la fonction $\tilde{f}$ est non croissante, et les caractéristiques se déplacent vers les $x \leq 0$. Sur $I(u_r, u_d)$, la fonction $\tilde{f}$ est non décroissante, et les caractéristiques se déplacent vers les $x \geq 0$. Sur $I(u_l, u_r)$, si $u_l \neq u_r$, la fonction $\tilde{f}$ est constante, et la solution comporte un choc de vitesse nulle (en effet $f(u_l) = f(u_r)$, donc $x'(t) = 0$), et si $u_l = u_r$ $(= u_*)$ la solution de (4.1) vérifie $u(0,t) = u_*$.

On en déduit donc, pour $u_l \neq u_r$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0, x<0} u(x,t) &= u_l \;, \\ \lim_{x \longrightarrow 0, x>0} u(x,t) &= u_r \;, \end{aligned} \tag{4.6}$$

et pour $u_l = u_r = u_*$,

$$u(0,t) \; = \; u_* \; . \tag{4.7}$$

Dans le cas particulier où f est monotone, non décroissante, on aura toujours $u_l = u_g$. En effet, si $u_g < u_d$, on a $f(u_g) \leq f(k)$ pour tout $k \in [u_g, u_d]$, et si $u_g > u_d$, on a $f(u_g) \geq f(k)$ (et donc $-f(u_g) \leq -f(k)$) pour tout $k \in [u_d, u_g]$. Ainsi, dans chaque cas $u_g \in I_*(u_g, u_d) \subset I(u_g, u_d)$, d'où $u_g = u_l$.

Dans le cas particulier où f est monotone, non croissante, on aura toujours $u_r = u_d$. En effet, si $u_g < u_d$, on a $f(u_d) \leq f(k)$ pour tout $k \in [u_g, u_d]$, et si $u_g > u_d$, on a $f(u_d) \geq f(k)$ (et donc $-f(u_d) \leq -f(k)$) pour tout $k \in [u_d, u_g]$. Ainsi, dans chaque cas $u_d \in I_*(u_g, u_d) \subset I(u_g, u_d)$, d'où $u_d = u_r$.

4.4 Le problème de Riemann au bord

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$, et deux constantes données u_d et A. On considère le problème suivant, pour $x \geq 0$,

$$u_t \; + \; f(u)_x \; = \; 0 \;\; , \;\; u(x,0) \; = \; u_d \; , \tag{4.8}$$

avec la condition limite

$$\operatorname*{Inf}_{k \in L(t)} \{ sg(A - \gamma_0 u(t)) \, (f(\gamma_0 u(t) - f(k)) \} \; = \; 0 \tag{4.9}$$

en introduisant l'intervalle $L(t) = [\min(A, \gamma_0 u(t)), \max(A, \gamma_0 u(t))]$ $(= I(A, \gamma_0 u(t)))$, où $\gamma_0 u$ désigne la trace de u en $x = 0$.

On aura, pour tout $t > 0$,

$$sg(\gamma_0 u - A) f(\gamma_0 u) \; = \; \operatorname*{Inf}_{k \in I(A, \gamma_0 u)} (\; sg(\gamma_0 u - A) \; f(k))$$

et comme les valeurs allant de $\gamma_0 u$ à u_d sont portées par des caractéristiques de vitesse non négative, on a aussi

$$sg(u_d - \gamma_0 u) \; f(\gamma_0 u) \; = \; \operatorname*{Inf}_{k \in I(\gamma_0 u, u_d)} (sg(u_d - \gamma_0 u) f(k)).$$

On en déduit que $\gamma_0 u \in I(A, u_d)$ et surtout que $\gamma_0 u$ est une extrémité de $I_*(A, u_d)$ défini comme en (4.5). Soit $u_* \in I_*(A, u_d)$, donc tel que

$$sg(u_d - A) f(u_*) \; = \; \operatorname*{Inf}_{k \in I(A, u_d)} (sg(u_d - A) f(k)).$$

Alors $u_* \in I(A, \gamma_0 u)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} &\textit{pour } A < u_d, \;\; \textit{on a} \;\; f(\gamma_0 u) = \operatorname*{Inf}_{k \in [A, u_d]} f(k) \; , \\ &\textit{pour } A > u_d, \;\; \textit{on a} \;\; f(\gamma_0 u) \; = \operatorname*{Sup}_{k \in [u_d, A]} f(k) \; . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pour le problème symétrique, c'est à dire, pour $x \leq 0$, B et u_g étant des constantes données,

$$u_t \; + \; f(u)_x \; = \; 0 \;\; , \;\; u(x,0) \; = \; u_g \; , \tag{4.11}$$

avec la condition limite

$$\operatorname*{Sup}_{k\in R(t)} \{sg(B-\gamma_0 u(t))\,(f(\gamma_0 u(t)-f(k))\,\} \;=\; 0 \tag{4.12}$$

où $R(t)=[\min(B,\gamma_0 u(t)),\max(B,\gamma_0 u(t))]$ $(=I(\gamma_0 u(t),B))$, et $\gamma_0 u$ désigne la trace de u en $x=0$, on obtient,

$$\begin{aligned} &pour\ B<u_g, \quad on\ a \quad f(\gamma_0 u)=\operatorname*{Sup}_{k\in[B,u_g]} f(k)\ ,\\ &pour\ B>u_g, \quad on\ a \quad f(\gamma_0 u)\ =\operatorname*{Inf}_{k\in[u_g,B]} f(k)\ . \end{aligned} \tag{4.13}$$

et $\gamma_0 u$ correspond effectivement à une extrémité de l'intervalle $I_*(u_g,B)\subset I(u_g,B)$.