

MODELISATION
et
CALCUL SCIENTIFIQUE

Alain LE ROUX, Université BORDEAUX1

17 mars 2005

Table des matières

1	Introduction à la Modélisation	4
1.1	La démarche	4
1.2	Un premier exemple : une réaction chimique	5
1.2.1	Le calcul analytique direct	6
1.2.2	La résolution numérique	7
1.3	Un exemple en biologie : la dynamique des populations	11
1.4	Un exemple en mécanique : la boule de pétanque.	13
1.5	Un prêt bancaire à taux variable	17
1.6	Les hypothèses mathématiques	20
1.7	Quelques généralités sur les méthodes numériques	22
1.8	Conclusion	26
2	La Modélisation d'une onde	27
2.1	Qu'est ce qu'une onde?	27
2.2	L'équation d'onde	28
2.2.1	L'exemple fondamental : l'équation des ondes	28
2.3	Quelques exemples d'ondes	30
2.3.1	Un produit financier	30
2.3.2	L'âge d'une population	31
2.3.3	Le trafic routier	32
2.3.4	L'équation de Burgers	34
2.4	Les caractéristiques	37
2.5	Les champs conservatifs et les chocs	39
2.5.1	Exemples, pour l'équation de Burgers	42
2.5.2	Caractérisation des chocs : la condition d'entropie	44
2.5.3	L'unicité	46
2.6	La discrétisation des équations d'ondes	48
2.6.1	Quelques schémas aux différences finies	48
2.6.2	Une méthode de volumes finis	51
2.6.3	Un dernier exemple	55
3	Les systèmes à plusieurs ondes	58
3.1	Les systèmes hyperboliques	58
3.2	L'exemple de référence : l'équation des ondes	61
3.3	Les systèmes physiques d'ordre 2	64

3.3.1	Le système de Saint-Venant	68
3.3.2	Les équations d'Euler en hydrodynamique	69
3.3.3	Un exemple académique	69
3.3.4	Le trafic routier	70
3.3.5	A propos des équations d'ondes (scalaires)	72

Chapitre 1

Introduction à la Modélisation

1.1 La démarche

La modélisation consiste à traduire en langage mathématique la description d'une observation, d'un phénomène ou d'une hypothèse concernant un évènement de la réalité. Ce langage mathématique est essentiellement constitué d'équations qui représentent des lois physiques (de conservation, par exemple) ou des lois d'état et des données issues d'observations ou de mesures expérimentales ou de simples évaluations prospectives proposées a priori. Plus la description est fine et plus le nombre de paramètres à prendre en compte est important, et plus le **modèle mathématique**, c'est à dire cet ensemble d'équations, de lois d'état et de données, devient complexe, et la résolution en devient aussi d'autant plus délicate. Cette **complexité** impose la plupart du temps l'assistance d'un matériel de calcul (informatique) et il devient nécessaire d'adapter le modèle mathématique, de le modifier éventuellement, pour en faire un **modèle numérique** qui pourra être traité par l'informatique. Le **calcul scientifique** a pour objet d'effectuer cette adaptation, et de mener à terme les calculs en machine. A ce niveau, la tâche la plus classique consiste à transformer le modèle mathématique **continu** en un modèle numérique **discret**, ou **modèle discret**. On parle alors de **discrétisation**. Pour un modèle continu donné, il y a bien entendu de multiples techniques de discrétisation possibles, qui ne vont pas toutes donner des résultats de même qualité. Le choix de la technique de discrétisation se fait en fonction de plusieurs critères, le premier étant certainement la propre culture scientifique et la compétence du modélisateur, qui ne pourra proposer que les techniques qu'il connaît suffisamment. Le second critère est de nature économique, au sens large, puisque par exemple la durée du calcul fait partie de son coût, et l'exigence d'une meilleure qualité correspond souvent à un coût plus élevé. On ne peut pas toutefois s'autoriser des temps de calcul trop importants. Ainsi, par exemple, si on demande plus de 24 heures de calcul pour prévoir la météo du lendemain, ce calcul est complètement inutile...

La qualité d'un résultat relève de deux propriétés essentielles. La première va assurer que le résultat obtenu correspond bien à ce que l'on attend, c'est à dire une approximation de la solution du modèle mathématique initial ; on l'appelle la **consistance**, mais on aurait pu aussi bien l'appeler la crédibilité. La seconde va mesurer la qualité de cette approximation. Il s'agit de la **précision**, qui s'évalue en terme d'**ordre de précision**. A ces deux propriétés il convient d'ajouter une troisième,

qui va assurer que le calcul numérique pourra être mené jusqu'à son terme, sans provoquer de situation incompatible avec le fonctionnement de la machine (overflow ou dépassement de capacité, division par zéro, etc.) ; il s'agit de la **stabilité**.

On parlera ensuite de **convergence** lorsque l'on assure la passage à la limite de la solution du modèle numérique (discret) vers la solution du modèle mathématique (continu) quand le paramètre de discrétisation tend vers zéro, ce qui signifie que cette discrétisation est imaginée devenir de plus en plus fine. Bien évidemment, il ne s'agit ici que d'une démarche abstraite de mathématicien, en pratique ce paramètre de discrétisation est fixé pour un calcul donné ; le résultat obtenu correspond à ce niveau fixé du paramètre de discrétisation, et devra être exploité comme tel, en se disant qu'il est rassurant de savoir qu'il n'est pas trop éloigné de la solution du modèle mathématique lorsqu'il y a convergence.

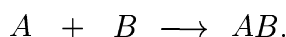
La **démarche** de modélisation comprend ainsi plusieurs étapes :

- la **construction du modèle mathématique**,
- l'**analyse** de ce modèle mathématique,
- la **discrétisation** de ce modèle mathématique pour en faire un modèle numérique,
- l'**analyse** du modèle numérique (stabilité, consistance),
- la **résolution** du modèle numérique (programmation informatique),
- la **validation** et l'**exploitation** des résultats.

Les quatre derniers points correspondent au **calcul scientifique**. L'étape de validation va par exemple consister à tester le programme de calcul sur des cas-tests dont on connaît déjà les résultats pour en vérifier le bon fonctionnement. Cette étape est nécessaire, avant l'exploitation sur d'autres cas pour lesquels les résultats recherchés ne sont bien entendu pas connus a priori, même si on peut en prévoir les grandes lignes lorsqu'on a acquis une expérience personnelle suffisante sur le sujet.

1.2 Un premier exemple : une réaction chimique

Deux produits notés A et B se combinent pour constituer un nouveau produit AB , selon la formule chimique



Cette réaction n'est pas instantanée, et bien entendu, elle va s'arrêter lorsque l'un des deux produits A ou B viendra à manquer. On note $u(t)$ le nombre de moles d'élément A présentes à l'instant t , et $v(t)$ le nombre de moles de l'élément B présentes au même instant t . A l'instant initial, c'est à dire pour $t = 0$, on doit décrire la situation, par exemple en posant

$$u(0) = u_0 \text{ , } v(0) = v_0 \text{ ,}$$

où $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ sont deux nombres réels positifs donnés. Il s'agit des **données initiales**. La réaction va produire des moles de produit AB dont le nombre à l'instant t sera noté $w(t)$; on peut penser qu'à l'instant initial ce produit AB n'est pas présent, et écrire

$$w(0) = 0 ,$$

ce qui constitue une autre donnée initiale.

La construction du modèle consiste à chaque instant à effectuer un bilan de la situation en fonction des situations connues aux instants précédents. On va ainsi comparer deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$, avec $\Delta t > 0$ réputé "petit", et décrire l'accroissement du nombre de moles de produit AB , $w(t)$, à partir d'un prélèvement sur les stocks $u(t)$ et $v(t)$ des produits A et B respectivement, en fonction d'un **coefficient de production** notée K ($K > 0$, supposé constant pour l'instant). On obtient

$$w(t + \Delta t) = w(t) + K \Delta t u(t) v(t) + \Delta t \omega(\Delta t)$$

où $\omega(\Delta t)$ est un **module de continuité**, c'est à dire une fonction de Δt qui tend vers zéro lorsque Δt tend vers zéro. Il nous faut aussi actualiser les stocks $u(t)$ et $v(t)$, en écrivant

$$u(t + \Delta t) = u(t) - K \Delta t u(t) v(t) + \Delta t \omega_1(\Delta t) , \quad v(t + \Delta t) = v(t) - K \Delta t u(t) v(t) + \Delta t \omega_2(\Delta t) ,$$

où on a introduit deux nouveaux modules de continuité $\omega_1(\Delta t)$ et $\omega_2(\Delta t)$.

En divisant chacune de ces équations par Δt puis en passant à la limite lorsque Δt tend vers zéro, on obtient le système différentiel suivant, constitué de trois équations :

$$u' + K u v = 0 \quad , \quad v' + K u v = 0 \quad , \quad w' - K u v = 0 .$$

La donnée de ce système et des conditions initiales u_0 et v_0 constituent notre modèle mathématique. On peut immédiatement remarquer les deux relations suivantes :

$$u' + w' = 0 \quad , \quad v' + w' = 0$$

qu'on peut intégrer immédiatement pour obtenir, à chaque instant t ,

$$u(t) + w(t) = u_0 \quad , \quad v(t) + w(t) = v_0 .$$

Ces deux relations s'interprètent comme un principe de Lavoisier, de conservation des atomes de chacun des éléments A et B , bien connu en chimie. Il est impératif que ce principe soit respecté lors de la résolution du modèle.

1.2.1 Le calcul analytique direct

On peut résoudre directement ce système différentiel, en exprimant u et v en fonction de w dans la troisième équation, ce qui donne l'équation différentielle suivante

$$w' = k (u_0 - w) (v_0 - w) ,$$

qui s'intègre facilement ; on obtient

$$w(t) = \frac{u_0 v_0 (e^{Kt(u_0-v_0)} - 1)}{u_0 e^{Kt(u_0-v_0)} - v_0} \quad \text{si } u_0 \neq v_0,$$

ou

$$w(t) = \frac{K u_0 t}{1 + K t} \quad \text{si } u_0 = v_0 .$$

On en déduit ensuite $u(t) = u_0 - w(t)$, et $v(t) = v_0 - w(t)$ dans chaque cas.

En pratique la constante K peut être très grande, quand le mélange est explosif par exemple, et dans ce cas, l'évaluation de l'exponentielle peut poser des problèmes : si $u_0 > v_0$, l'expression $e^{Kt(u_0-v_0)}$ est très grande et on ne disposera pas d'assez de chiffres significatifs en machine pour retrancher 1. On a l'effet analogue si $u_0 < v_0$, le nombre 1 étant alors très grand devant l'exponentielle. Cette expression est ainsi difficile à exploiter graphiquement par exemple, pour étudier la phase transitoire, c'est à dire avant d'atteindre pour $w(t)$ la valeur asymptotique $\min(u_0, v_0)$.

1.2.2 La résolution numérique

La résolution numérique exige une discrétisation du temps. On introduit un paramètre de discrétisation Δt qui correspond à un petit accroissement en temps, c'est à dire une durée petite devant l'échelle de temps du phénomène, et on va approcher la solution aux instants $t_n = n \Delta t$, avec $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire construire des valeurs u^n , v^n , w^n proches de $u(t_n)$, $v(t_n)$, $w(t_n)$ respectivement. On peut utiliser la **méthode** suivante

$$w^{n+1} = w^n + K \Delta t u^n v^n,$$

qui s'inspire directement du bilan décrit lors de la construction du modèle mathématique, et de la même façon,

$$u^{n+1} = u^n - K \Delta t u^n v^n \quad , \quad v^{n+1} = v^n - K \Delta t u^n v^n.$$

La donnée de $w^0 = 0$, $u^0 = u_0$, $v^0 = v_0$ permet de calculer w^1 , u^1 , v^1 et de proche en proche, on construit tous les autres w^n , u^n , v^n , jusqu'à un certain numéro $n = N$ fixé à l'avance pour lequel on a décidé d'arrêter le calcul, par exemple une valeur $N = \frac{T_{max}}{\Delta t}$.

On observe que le nombre d'atomes de chaque élément est bien conservé ; en effet,

$$w^{n+1} + u^{n+1} = w^n + u^n = \dots = u_0 \quad , \quad w^{n+1} + v^{n+1} = w^n + v^n = \dots = v_0 .$$

On doit aussi s'inquiéter de propriétés plus triviales, comme la **positivité** de ces nombres de moles ; on a en effet

$$u^{n+1} = u^n (1 - K \Delta t v^n) \quad , \quad v^{n+1} = v^n (1 - K \Delta t u^n) \quad .$$

La positivité de u^n ou de v^n ne peut être assurée que sous les conditions

$$\Delta t \leq \frac{1}{K u_0} \quad , \quad \Delta t \leq \frac{1}{K v_0} \quad .$$

Ceci constitue une **condition de stabilité**. Elle peut être très contraignante lorsque le coefficient de production K est grand, ainsi que lorsque l'un (au moins) des nombres u_0 ou v_0 . Elle exige le choix d'une petite valeur de Δt ce qui va multiplier les calculs nécessaires pour atteindre un temps d'arrêt T_{max} fixé à l'avance.

On peut décider de remplacer la méthode précédente par la suivante. On commence par calculer u^{n+1} et v^{n+1} par

$$u^{n+1} = u^n - K \Delta t u^{n+1} v^{n+1} \quad , \quad v^{n+1} = v^n - K \Delta t u^{n+1} v^{n+1} \quad ,$$

puis w^{n+1} par

$$w^{n+1} = w^n + K \Delta t u^{n+1} v^{n+1} \quad .$$

A première vue, cette méthode semble peu différente de la précédente, mais il y a en fait une différence fondamentale : les formules ne sont plus **explicites** mais **implicites**, et cela va nécessiter la résolution préalable d'au moins une équation. On commence par évaluer u^{n+1} , en remarquant que

$$u^{n+1} - v^{n+1} = u^n - v^n \quad ,$$

d'où $v^{n+1} = u^{n+1} - u^n + v^n$. On obtient que u^{n+1} est une racine du polynôme du second degré

$$K \Delta t X^2 + (1 + K \Delta t (v^n - u^n)) X - u^n = 0 \quad .$$

Il est immédiat que si la positivité de u^n est acquise (c'est vrai pour $n = 0$), ce polynôme admet deux racines réelles, et on retiendra celle ci :

$$u^{n+1} = \frac{1}{2 K \Delta t} \left(\sqrt{(1 + K \Delta t (v^n - u^n))^2 + 4 K \Delta t u^n} - (1 + K \Delta t (v^n - u^n)) \right)$$

parce qu'elle est positive, et ne diverge pas lorsque Δt tend vers zéro. Ce qui n'est pas le cas de l'autre racine.

Une fois u^{n+1} évalué, on obtient v^{n+1} par

$$v^{n+1} = u^{n+1} - u^n + v^n$$

qui donne également un résultat positif. Il faut noter que la positivité de u^{n+1} et donc aussi celle de v^{n+1} est assurée **sans aucune restriction sur Δt** même lorsque K est grand.

Enfin, l'évaluation de w^{n+1} est immédiate en reprenant la formule

$$w^{n+1} = w^n + K \Delta t u^{n+1} v^{n+1}.$$

On aurait pu tout aussi bien travailler directement avec w^{n+1} , en remarquant que

$$w^{n+1} + u^{n+1} = w^n + u^n \quad , \quad w^{n+1} + v^{n+1} = w^n + v^n \quad .$$

On obtient

$$w^{n+1} - w^n = K \Delta t (u^n + w^n - w^{n+1}) (v^n + w^n - w^{n+1}) \quad ,$$

et en posant

$$X_n = w^{n+1} - w^n \quad ,$$

on observe que X_n est une racine du polynôme du second degré

$$K \Delta t X_n^2 - (1 + K \Delta t (u^n + v^n)) X_n + K \Delta t u^n v^n = 0 \quad .$$

On pose

$$\Delta_n = (1 + K \Delta t (u^n + v^n))^2 - 4 K^2 \Delta t^2 u^n v^n \quad ,$$

qui est toujours positif si u^n et v^n le sont, toujours sans aucune restriction dans le choix de Δt . On retiendra ensuite la racine

$$X_n = \frac{1}{2 K \Delta t} \left(1 + K \Delta t (u^n + v^n) - \sqrt{\Delta_n} \right) \quad ,$$

qui est positive, et surtout qui ne diverge pas lorsque Δt tend vers zéro.

La méthode numérique correspond aux différentes étapes suivantes

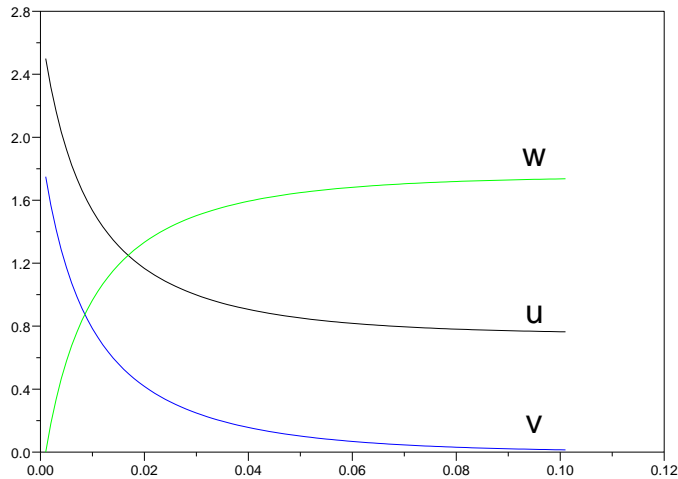
$$\textit{Calculer } \Delta_n \quad , \quad \textit{puis } X_n \quad ,$$

par les formules précédentes, puis calculer

$$w^{n+1} = w^n + X_n \quad , \quad u^{n+1} = u^n - X_n \quad , \quad v^{n+1} = v^n - X_n \quad .$$

On vérifie assez facilement que ces trois quantités sont positives.

La figure suivante représente les résultats numériques obtenus en programmant cette méthode, avec $K = 50$, $u_0 = 2.5$, $v_0 = 1.75$ et un temps maximal de 0.1, avec $\Delta t = 0.001$.



On observe une première phase transitoire qui se stabilise en un état stationnaire lorsque l'un des éléments, ici B , vient à manquer.

Imaginons maintenant que ce coefficient de production K dépende du temps ou de la solution, et que par exemple cette dépendance soit tabulée, à partir de mesures expérimentales. Le calcul analytique n'est plus possible, tandis que, moyennant une adaptation élémentaire, la méthode numérique va continuer à fonctionner. Il suffira de remplacer K par une expression de la forme $K_n = K(t_n, u^n, v^n, w^n)$ dans l'instruction correspondante du programme.

En résumé, le calcul analytique nous permet d'obtenir dans des cas très particuliers la solution exacte, donnée par une formule mathématique. Ceci peut être très utile pour valider un programme : on peut comparer cette solution analytique au résultat du calcul. La généralisation à des cas complexes n'est plus possible pour le calcul analytique, mais l'est à peu de frais pour le calcul numérique, en toute confiance, le programme ayant déjà été validé. Par contre, le résultat n'est qu'un tableau de nombres, ou ici un simple graphe représentant ce tableau ; on n'a plus une formule

mathématique. On note aussi qu'il y a plusieurs choix de méthodes numériques adaptées, certaines (explicites en général) exigeant des contraintes sur le paramètre de discrétisation et d'autres pas. On a vu aussi que pour une méthode donnée, il peut y avoir plusieurs façons de la mettre en oeuvre numériquement. Enfin, on doit aussi remarquer que la résolution explicite devait distinguer les cas où $u_0 \neq v_0$ des cas où $u_0 = v_0$, ce qui n'est pas nécessaire pour aucune des méthodes numériques envisagées ici.

1.3 Un exemple en biologie : la dynamique des populations

On imagine un espace fermé, où vivent deux espèces d'animaux. Il s'agit bien entendu d'une supposition abstraite, bien que des exemples réels aient été observés. Par exemple au sommet de Devil's Tower, dans le Wyoming, une espèce de souris et une espèce de serpents ont cohabité pendant des siècles, sans échanges avec l'extérieur compte tenu des falaises verticales entourant le site.

On note $u(t)$ le nombre d'individus de la première espèce, et $v(t)$ le nombre d'individus de la seconde espèce, à l'instant t . On suppose que la première espèce est un prédateur de la seconde. En procédant à un bilan à chaque instant comme ci dessus, on obtient le modèle mathématique suivant

$$u' = -\mu u + K u v \quad , \quad v' = -\lambda v - M u v + A(t) \quad ,$$

où μ et λ sont les coefficients de mortalité naturelle de chacune des espèces, K le coefficient d'augmentation de la population de prédateur en fonction des proies consommées, M le coefficient d'incidence de ce prélèvement sur la seconde population et $A(t)$ une ressource qu'utilise la seconde population pour se développer. Elle dépend a priori du temps (elle peut changer avec les saisons par exemple).

On ne peut pas exprimer aisément v en fonction de u afin de l'éliminer pour obtenir une seule équation en u , qui sera de toutes façons certainement difficile à intégrer analytiquement.

Une première question consiste à savoir si un état d'équilibre viable peut se produire et se maintenir, au moins lorsque A est une constante. Dans ce cas les deux dérivées u' et v' deviennent nulles et la première équation donne

$$u (K v - \mu) = 0 \quad ,$$

d'où soit $u = 0$ et il y a eu extinction des prédateurs, soit $v = \frac{\mu}{K}$. Il est intéressant de remarquer que l'équilibre de la population v ne dépend que des paramètres de ses prédateurs.

Pour la seconde équation, l'équilibre se traduit par

$$A = v (\lambda + M u) \quad ,$$

d'où compte tenu du premier équilibre pour v ,

$$u = \frac{A K - \lambda \mu}{\mu M} \quad ,$$

qui doit être positif. On obtient la condition

$$A K > \lambda \mu .$$

Si elle n'est pas vérifiée il y aura extinction des prédateurs. Elle est toujours vérifiée si A est assez grand, c'est à dire si la population v dispose de suffisamment de ressource, à la fois pour se développer elle même et pour subir sans trop d'inconvénients le prélèvement du prédateur.

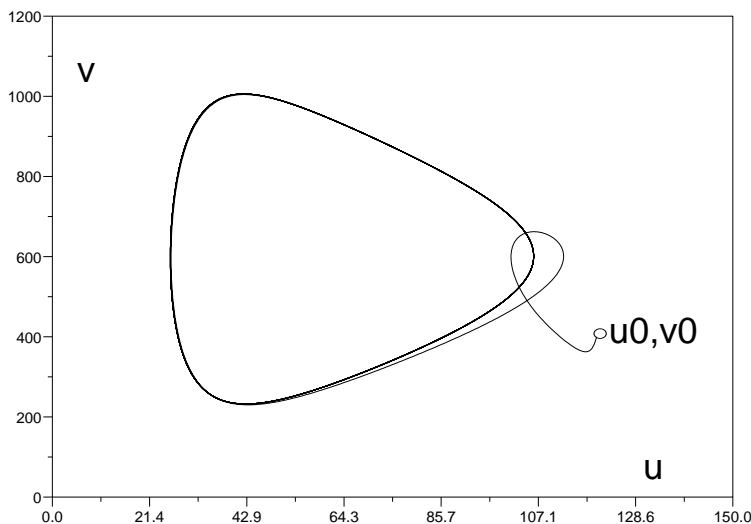
Remarque : un exemple actuel correspond aux populations de pêcheurs et de poissons pêchés, la "mortalité" du pêcheur étant comprise comme une cessation d'activité "devenue non rentable". L'étude élémentaire que l'on vient de faire montre qu'à terme il y aura extinction de la population du métier de pêcheur... sauf si on fournit suffisamment de ressources nutritives aux poissons.

En reprenant les mêmes notations que pour la discrétisation précédente, on propose la méthode numérique suivante :

$$u^{n+1} = u^n - \mu \Delta t u^{n+1} + K u^n v^{n+1} \Delta t , \quad v^{n+1} = v^n - \lambda \Delta t v^{n+1} - M u^n v^{n+1} \Delta t + A(t_n) \Delta t ,$$

qui se résoud par

$$v^{n+1} = \frac{v^n + A(t_n) \Delta t}{1 + \lambda \Delta t + M u^n \Delta t} , \quad u^{n+1} = u^n \frac{1 + K \Delta t v^{n+1}}{1 + \mu \Delta t} .$$

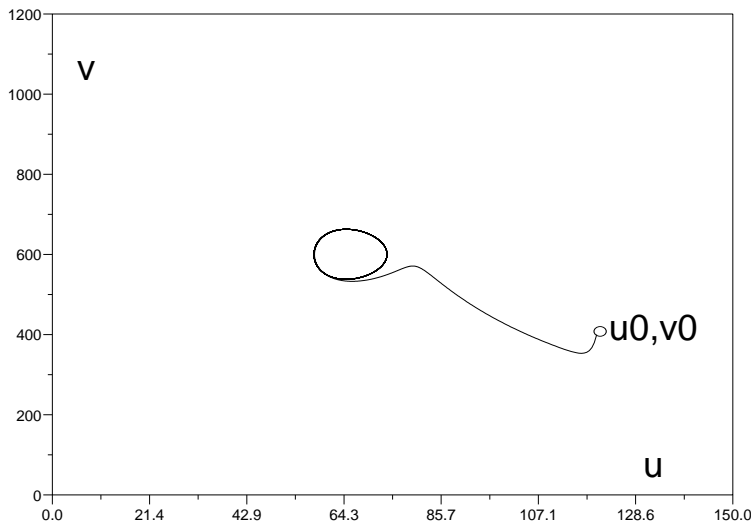


On remarque que le choix de cette méthode offre plusieurs avantages : la positivité de u^{n+1} et la positivité de v^{n+1} sont assurées (il n'y a pas de signe " - " dans les formules de résolution), sans aucune restriction sur la taille de Δt . Il est indispensable de calculer v^{n+1} avant de calculer u^{n+1} . La figure ci dessus présente un test de cette méthode, avec les valeurs suivantes des paramètres :

$$K = 0.0002, M = 0.042, \mu = 0.12, \lambda = 0.24, A(t) = A_0 (1 + \alpha \sin(\omega t)),$$

où $A_0 = 1800, \alpha = 0.75, \omega = 0.1$.

Pendant un temps égal à 1000, on observe une première phase de transition, puis une convergence vers une courbe fermée qui correspond à un comportement périodique de la solution. Au bout du temps 1000, la solution a décrit environ 15 périodes. Lorsque le caractère saisonnier est réduit, l'amplitude de cette courbe périodique diminue. Ainsi, pour $\alpha = 0.15$, on obtient les résultats suivants, toutes choses égales par ailleurs :



On conserve un comportement périodique, dont la variation d'amplitude est plus petite. En prenant α proche de zéro, on se rapproche davantage d'une valeur asymptotique correspondant à $u = 65.714, v = 600$, c'est à dire les valeurs prévues plus haut. Les valeurs de départ étaient $u_0 = 120, v_0 = 400$ dans chacun des cas.

1.4 Un exemple en mécanique : la boule de pétanque.

On s'intéresse au mouvement de roulement d'une boule de pétanque sur un sol plat, après l'instant de son impact sur le sol, et plus particulièrement à la position qu'elle aura adopté une fois

stabilisée. On note $x(t)$ sa position à l'instant t compté après l'instant $t = 0$ de l'impact, et on se fixe $x(0) = 0$ pour désigner le point d'impact. En notant $v(t)$ la vitesse de la boule à l'instant t , avec $v(0) = v_0$ donné, on a par définition de la vitesse

$$x'(t) = v(t) ,$$

et en introduisant un coefficient de friction noté k , on décrit la perte de vitesse par l'équation suivante :

$$v'(t) = -k v(t) .$$

L'intégration de ce système est immédiate, et donne d'abord

$$v(t) = v_0 e^{-kt} ,$$

et ensuite,

$$x(t) = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) .$$

On observe que si $t \rightarrow +\infty$, cette position va converger vers le point $\frac{v_0}{k}$, qui ne sera cependant atteint qu'au bout d'un temps infini. Si on veut un arrêt de la boule avant un temps fini, on doit par exemple modifier le terme de friction. On peut choisir de "renforcer" la puissance, en prenant pour équation de réduction de la vitesse

$$v'(t) = -k v(t)^2 ,$$

qui conduit à la solution

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + k t v_0} , \quad x(t) = \frac{1}{k} \ln (1 + k t v_0) .$$

On remarque que $x(t)$ tend vers l'infini avec t : la boule ne s'arrête jamais !

On propose alors une démarche inverse, en prenant comme réduction de vitesse, l'équation suivante, par exemple,

$$v'(t) = -k \sqrt{v(t)} ,$$

étant bien entendu que la vitesse $v(t)$ reste positive ou nulle. On obtient

$$v(t) = \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2} \right)^2 , \quad x(t) = v_0 t - k \frac{t^2}{2} + k^2 \frac{t^3}{12} ,$$

avec un instant d'arrêt

$$t_0 = \frac{2 \sqrt{v_0}}{k} ,$$

et un point d'arrêt en

$$x_0 = \frac{2 v_0^{\frac{3}{2}}}{3 k} .$$

En reprenant les mêmes notations que précédemment pour la discrétisation, on peut envisager la méthode explicite suivante, pour l'équation de la vitesse :

$$v^{n+1} = v^n - k \Delta t \sqrt{v^n} ,$$

ou encore la méthode implicite

$$v^{n+1} = v^n - k \Delta t \sqrt{v^{n+1}} .$$

On peut même combiner ces deux méthodes pour écrire la méthode hybride suivante

$$v^{n+1} = v^n - \frac{k \Delta t}{2} \left(\sqrt{v^n} + \sqrt{v^{n+1}} \right) .$$

Notre but est surtout de trouver une bonne approximation du point d'arrêt. En ce point, la vitesse va brutalement s'annuler, ce qui signifie qu'on ne doit surtout pas chercher à préserver la positivité de la vitesse. Or la méthode implicite est telle que

$$v^{n+1} = 0 \iff v^n = 0 ,$$

et il sera donc théoriquement impossible d'obtenir une vitesse nulle en partant d'une valeur $v_0 > 0$. En pratique, le zéro "machine" est atteint, et ceci se traduit finalement par une perte de précision non négligeable.

Ce n'est pas le cas des deux autres méthodes. Il faudra simplement convenir de corriger une éventuelle valeur négative de v^{n+1} en la remplaçant par zéro. En effet, pour la méthode explicite, la positivité de v^{n+1} n'est assurée que lorsque la condition suivante

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{v^n}}{k}$$

est vérifiée, ce qui interdit soit de voir v^n devenir petit, et ce n'est pas ce que l'on cherche, soit de prendre un pas Δt constant ; il devrait être actualisé en fonction de $\sqrt{v^n}$ et deviendrait nul lors de l'arrêt de la boule, ce qui imposerait un temps de calcul théoriquement infini.

Une fois le champ de vitesse obtenu, on obtient la position en discrétisant l'équation $x' = v$, par exemple de la façon suivante :

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t \frac{v^{n+1} + v^n}{2},$$

qui assure une bonne précision.

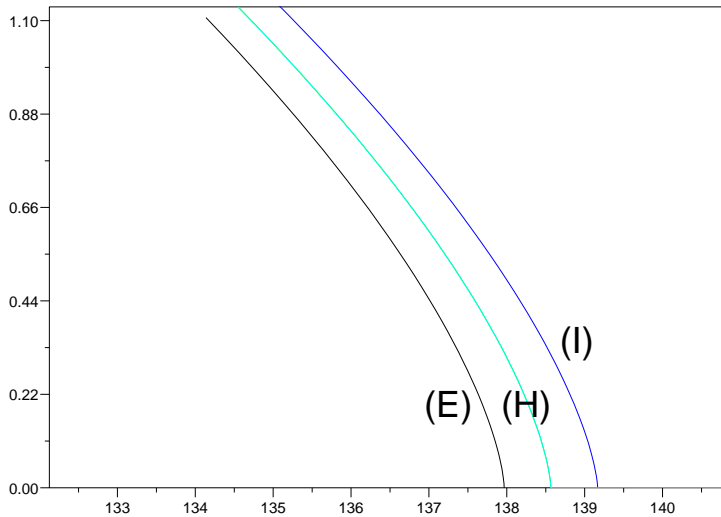
Les trois méthodes ont été comparées pour les choix suivants des paramètres : $v_0 = 12$, $k = 0.2$, et le paramètre de discrétisation $\Delta t = 0.2$. On obtient les points d'arrêt suivants :

$x = 137.96639$ pour la méthode explicite (E),

$x = 139.16635$ pour la méthode implicite (I),

$x = 138.56637$ pour la méthode hybride (H),

le point d'arrêt exact étant $x = 138.56406$. Il faut noter que pour la méthode implicite, on observe en fait une asymptote : la vitesse tend vers zéro, sur une dizaine de points de discrétisation. L'arrêt est beaucoup plus net pour les autres méthodes.



Malgré les apparences, la mise en oeuvre de la méthode hybride est relativement aisée. Il suffit d'écrire la méthode sous la forme suivante :

$$v^{n+1} - v^n = -\frac{k \Delta t}{2} \left(\sqrt{v^{n+1}} + \sqrt{v^n} \right),$$

qui devient, en divisant par $\sqrt{v^{n+1}} + \sqrt{v^n}$,

$$\sqrt{v^{n+1}} = \sqrt{v^n} - \frac{k \Delta t}{2},$$

et de proche en proche, on en déduit

$$\sqrt{v^n} = \sqrt{v^0} - \frac{k n \Delta t}{2} ,$$

ce qui revient à dire que cette méthode interpole la solution exacte. Il n'est donc pas étonnant qu'elle apporte le meilleur résultat.

Dans l'étude précédente, le calcul analytique nous a donné l'essentiel des renseignements sans qu'il soit nécessaire d'utiliser le modèle numérique. Il a aussi permis de déterminer la meilleur choix de la méthode numérique. Cependant, si on souhaite généraliser le problème, par exemple en prenant en compte l'hétérogénéité du sol, le coefficient k dépendant alors de la variable x elle même dépendante de v , l'utilisation du modèle numérique devient incontournable.

1.5 Un prêt bancaire à taux variable

On veut modéliser à chaque instant t le montant du capital restant dû, noté $\phi(t)$, d'un prêt à taux variable. On note $x(t)$ ce taux variable ; il s'agit d'une fonction définie sur l'intervalle $]0, T[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, T étant la durée du prêt, qui évolue selon des critères convenus lors de la signature de ce prêt, en fonction d'un indice officiel, lié au coût de la vie ou au coût de la construction par exemple. Entre deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$, ce taux est actualisé selon la formule

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \alpha(t) \Delta t x(t) ,$$

où $\alpha(t)$ est une fonction donnée (liée au critère convenu). En divisant par Δt et après un passage à la limite, on obtient l'équation différentielle

$$x'(t) = \alpha(t) x(t) ,$$

qu'on peut résoudre en connaissant le taux initial $x(0) = x_0$, qui est aussi une quantité connue lors du démarrage du prêt. On obtient une expression de la forme

$$x(t) = x_0 \exp \left(\int_0^t \alpha(s) ds \right) ,$$

qu'on peut expliciter dans la mesure où l'intégration de α est faisable analytiquement.

Entre ces mêmes deux instants consécutifs, l'actualisation du capital restant dû est décrite par

$$\phi(t + \Delta t) = \phi(t) + x(t) \Delta t \phi(t) - R(x(t), \phi(t), t) \Delta t ,$$

où $R(x, \phi, t)$ correspond aux remboursements périodiques ou à d'éventuels remboursements anticipés (d'où la dépendance en t), qui doit dépendre de ϕ parce que R doit devenir nul lorsque $\phi = 0$ (on ne continue pas à payer après qu'on a tout remboursé!) et il peut dépendre de x pour assurer un remboursement total au plus tard à l'échéance T . Ceci correspond par exemple à des mensualités variables.

On divise par Δt comme précédemment, pour obtenir après un passage à la limite, l'équation différentielle

$$\phi'(t) = x(t) \phi(t) - R(x(t), \phi(t), t) ,$$

qu'on cherche à intégrer en connaissant le montant initial du prêt : $\phi(0) = \phi_0$.

Notons qu'il est préférable de satisfaire la condition

$$R(x(t), \phi(t), t) > x(t) \phi(t) ,$$

pour assurer la décroissance en temps du capital restant dû, ce qui laisse supposer que l'organisme de crédit a bien vérifié que le titulaire du prêt présentait bien les garanties suffisantes de solvabilité... Notons également que si cette inégalité n'est pas satisfaite, on ne doit plus appeler $\phi(t)$ le "capital restant dû", mais le "total restant dû", qui incluerait un arriéré d'intérêts (tout ceci est cependant beaucoup pratiqué par les banques, pour réduire les risques de remboursements anticipés). Le total des sommes versées est donné par

$$\int_0^T R(x(t), \phi(t), t) dt .$$

La résolution analytique de cette équation n'est pas évidente, même pour des cas simples. Ainsi pour $\alpha(t) = \alpha_0$ constant, la fonction ϕ peut s'exprimer directement en fonction de la variable x mais la résolution fait intervenir la fonction "intégrale exponentielle" définie par

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^\xi}{\xi} d\xi = \ln(x) + C + \frac{x}{1.1!} + \frac{x^2}{2.2!} + \dots + \frac{x^n}{n.n!} + \dots$$

où $C = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)) \simeq 0.5772$ est la constante d'Euler. On peut se dire que même si on réussit à mener à son terme le calcul analytique, en s'aidant éventuellement d'un logiciel approprié, le résultat sera difficilement exploitable.

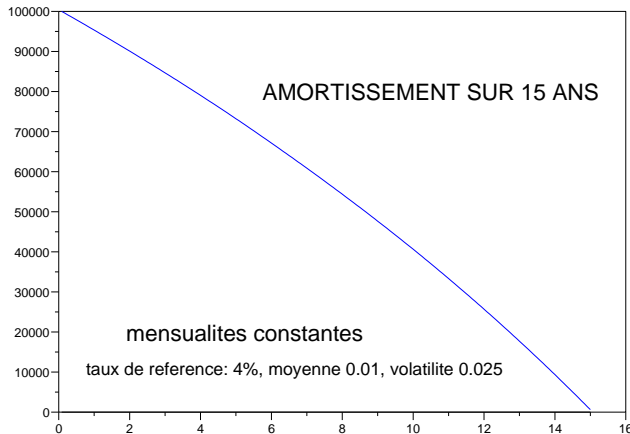
On s'oriente plutôt vers un choix de méthodes numériques adaptées.

On note encore Δt le paramètre de discrétisation en temps, tel que $N = \frac{T}{\Delta t}$ soit un entier, puis x^n et ϕ^n les approximations respectives de $x(n\Delta t)$ et de $\phi(n\Delta t)$. On peut prendre une méthode explicite :

$$x^{n+1} = x^n (1 + \alpha(n\Delta t) \Delta t) , \quad x^0 = x_0 ,$$

puis

$$\phi^{n+1} = \phi^n (1 + x^n \Delta t) - R(x^n, \phi^{n+1}, n\Delta t) \Delta t , \quad \phi^0 = \phi_0 .$$



La dépendance de R par rapport à ϕ est évaluée en fonction de ϕ^{n+1} pour assurer que ϕ^{n+1} ne devienne pas négatif à la dernière échéance. La mise en oeuvre de cette méthode est immédiate, et elle permet l'utilisation d'un générateur de nombres aléatoires dans l'évaluation de $\alpha(n\Delta t)$, considéré alors comme une variable aléatoire, ce qui permet de faire intervenir la volatilité. La figure précédente représente un calcul effectué pour un prêt de 100 000 Euros sur une durée de 15 ans, avec un taux de référence de 4%. On a pris $\Delta t = \frac{1}{12}$, c'est à dire un mois, et le taux était modulé par une variable de Gauss (loi normale de moyenne $m = 0.01$ et d'écart-type (volatilité) $\sigma = 0.025$). Les mensualités sont de 750 Euros, sauf la dernière, de 619 Euros. Le total des sommes versées est de 134 869 Euros ; elle est obtenue en calculant

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} R(x^n, \phi^{n+1}, n\Delta t) \Delta t .$$

On remarque qu'au niveau de l'écriture des équations, les modèles de la boule de pétanque et du prêt sont ressemblants, y compris la particularité de la nécessité d'arriver dans une position "zéro" à la fin du calcul, et les allures comparables des courbes de résultats. Il y a cependant une grande différence d'échelle : 15 ans contre quelques secondes... On note également l'introduction d'un terme aléatoire dans le modèle du prêt, ce qui aurait très bien pu être aussi le cas pour la boule, pour représenter d'éventuelles petites variations du sol. Il est aussi intéressant de remarquer que le variable $x = x(t)$ qui joue dans les deux cas le rôle de la variable de position, n'est pas toujours une variable d'espace.

On retiendra ainsi une certaine unité de la démarche dans la modélisation numérique, malgré la très grande disparité des exemples d'application.

1.6 Les hypothèses mathématiques

Ces quatre premiers exemples permettent déjà de rentrer dans le sujet : on y a introduit des méthodes numériques, on a pu voir que le choix de ces méthodes était toujours lié au résultat attendu d'une part, au coût de calcul d'autre part.

Le résultat théorique le plus connu pour les équations différentielles est bien sûr le théorème de Cauchy, qui exige une condition de Lipschitz sur le second membre. Plus exactement, pour une équation de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad ,$$

on suppose que la fonction f vérifie une propriété de la forme

$$\exists L > 0 \quad , \quad \forall t > 0 \quad , \quad |f(t, y) - f(t, z)| \leq L |y - z| \quad ,$$

appelée condition de Lipschitz uniforme et L est la constante de Lipschitz.

Il se trouve que cette condition n'est pas toujours remplie en pratique. Pour l'exemple de la boule de pétanque, le cas réaliste correspond à

$$f(v) = -k \sqrt{v} \quad ,$$

ou, de façon plus générale,

$$f(v) = -k v^\beta \quad ,$$

avec $0 < \beta < 1$, qui ne satisfait pas la condition de Lipschitz en $v = 0$, valeur qui doit pourtant être atteinte en réalité. Cependant un changement de variable évident : poser $u = \sqrt{v}$, ou $u = v^{1-\beta}$ dans le cas plus général, permet de retrouver la condition de Lipschitz. Dans les deux premiers exemples, un terme en uv introduit un caractère quadratique dans les équations, mais on doit noter qu'en pratique, ce terme reste borné, et la perte du caractère lipschitzien de f à l'infini ne pose en fait pas de véritable problème. Dans le dernier exemple, on n'a pas la maîtrise du terme de remboursement $R(x, \phi, t)$, qui peut présenter une croissance instantanée très forte en cas de remboursement anticipé important ; ici non plus le caractère Lipschitzien n'est pas toujours respecté. On retient qu'au premier degré, on ne sera pas toujours dans les hypothèses d'application du théorème de Cauchy, mais qu'en se donnant la peine de faire une étude préalable, assez sommaire quelquefois, on vérifie bien souvent qu'on peut effectivement s'y ramener.

Il y a cependant des cas où il est impossible de se ramener à la condition de Lipschitz, lorsqu'elle n'est déjà pas assurée au niveau de la donnée initiale. Par exemple, reprenons le cas de la boule de pétanque avec $v(t_0) = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$, pour un instant t_0 donné et $t > t_0$, en n'excluant pas a priori la possibilité d'une vitesse négative, ce qui correspond à l'équation

$$v'(t) = -k \sqrt{|v(t)|} \quad .$$

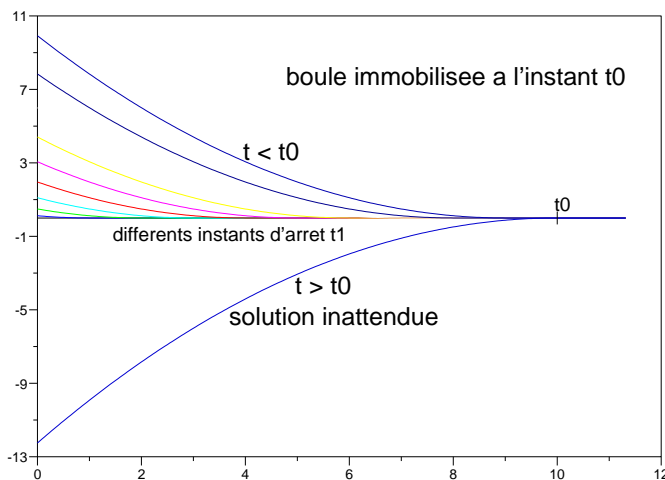
On s'attend bien sûr à ce que la boule ne bouge pas, c'est à dire à la solution $v(t) = 0$. Il existe cependant une autre solution donnée par

$$v(t) = - \left(\frac{k (t - t_0)}{2} \right)^2 ,$$

qui traduit un mouvement accéléré vers l'arrière, complètement inattendu et impossible physiquement car il n'y a pas ici, au départ, d'énergie disponible pour assurer cette mise en vitesse. Ceci constitue un exemple de **non unicité** de la solution.

Une méthode numérique instable partant d'une valeur $v_0 < 0$, même très proche de zéro pourra se brancher sur l'approximation de cette solution si on utilise $\sqrt{|v^n|}$ au lieu de $\sqrt{\max(v^n, 0)}$.

De tels exemples apparaissent cependant dans certaines applications en physique, lorsque suffisamment d'énergie est disponible. C'est le cas en bord de mer, sur une plage, on voit des vagues alors qu'une surface horizontale de l'eau est tout à fait possible. C'est parce qu'il y a suffisamment d'énergie présente pour assurer le maintien et la propagation de ces vagues. Le profil de la surface de l'eau est horizontal entre deux vagues, puis se modifie brusquement au passage de la vague. Il s'agit d'un phénomène de **bifurcation**, qui apparaît lorsque les conditions de l'unicité ne sont pas assurées. D'autres phénomènes de bifurcation apparaissent en physique, ou tout simplement en science de l'environnement, lorsqu'apparaissent certaines catastrophes, comme des tornades, cyclones ou même des raz de marée.



Un autre exemple concernant la boule de pétanque consiste à remarquer que si une boule est immobilisée à un instant t_0 , en un point x_0 , et que l'on se pose la question de retrouver l'histoire récente de cette boule, toutes les solutions suivantes sont possibles. Soit $t_1 \leq t_0$, $t_1 \geq 0$; on pose

$$v(t) = \begin{cases} \frac{k^2}{4} (t_1 - t)^2 & \text{si } t \leq t_1 \\ 0 & \text{si } t_1 < t \leq t_0 \end{cases}, \quad v_0 = \left(\frac{k t_1}{2} \right)^2, \quad x_1 = x_0 - \frac{2 v_0^{\frac{3}{2}}}{3 k}.$$

On obtient qu'il est possible que la boule ait été lancée au point x_1 ci dessus, à la vitesse v_0 , à l'instant $t = 0$, puis qu'elle ait roulé jusqu'au point x_0 , pour s'y immobiliser à l'instant t_1 , et qu'ensuite elle y soit restée immobilisée, et qu'on la retrouve à l'instant $t_0 > t_1$ toujours à cet endroit. Bien entendu, si $t_1 = 0$, la boule n'a même pas été lancée entre les instants $t = 0$ et t_0 . Dans chaque cas, à l'instant $t_1 > 0$, on assiste à une bifurcation. Notons que nous n'avons ici considéré que des vitesses positives, la même chose est possible avec des vitesses négatives, et on le retrouve en prenant le symétrique du cas précédent par rapport au point x_0 . On retient qu'il est difficile, par la modélisation de retrouver l'histoire d'un phénomène. On peut tout au plus faire une hypothèse sur un état antérieur, puis par la modélisation, valider cette hypothèse en retrouvant, par le calcul, l'état présent à partir de cet état antérieur.

1.7 Quelques généralités sur les méthodes numériques

On considère toujours une équation de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad y(0) = y_0 \quad ,$$

où y_0 constitue une donnée initiale. La fonction y peut être à valeurs réelles ou même à valeurs dans \mathbb{R}^d , d entier sans que cette généralisation ne pose de problème théorique particulier. La fonction f est supposée satisfaire la condition uniforme de Lipschitz, de constante L , c'est à dire

$$\forall t \geq 0, \forall y, z \in \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^d \quad |f(t, y) - f(t, z)| \leq L |y - z| \quad ,$$

où \mathbb{A} désigne une partie de \mathbb{R}^d contenant les valeurs attendues de f . En effet, peut très bien satisfaire une condition de Lipschitz uniforme sur une partie bornée de f qui contient les valeurs attendues, et ne pas en satisfaire sur \mathbb{R}^d tout entier. Par exemple pour l'équation

$$y'(t) = -y(t)^2, \quad y(0) = y_0 > 0 \quad ,$$

il est immédiat que les valeurs de $y(t)$ restent positives et inférieures à y_0 , la fonction y étant décroissante. On peut ainsi prendre $\mathbb{A} = [0, y_0]$ où f vérifie une condition de Lipschitz de constante $L = 2y_0$, tandis qu'elle n'a pas de telle propriété sur \mathbb{R} tout entier.

Reprenons les notations de discrétisation précédentes, le pas de discrétisation étant noté Δt et l'approximation de $y(n\Delta t)$ étant notée y^n à tout instant $t_n = n\Delta t$. Une méthode numérique est représentée par une expression de la forme suivante

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \Phi(t_n, y^n, \Delta t)$$

où la fonction

$$\Phi : (t, y, h) \mapsto \Phi(t, y, h)$$

est définie et continue sur $[0, T] \times \mathbb{A} \times [0, h_0]$ avec h_0 fixé, et \mathbb{A} éventuellement un peu plus grand que le précédent pour contenir les valeurs de la solution approchée.

Si la fonction Φ satisfait une condition de Lipschitz uniforme

$$\exists M > 0 \forall t \in [0, T], \forall h \in [0, h_0], \forall y, z \in \mathbb{A}, |\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| \leq M |y - z|$$

la méthode est **stable**, c'est à dire qu'une petite perturbation des données ne pourra provoquer qu'une petite perturbation du résultat. De plus la méthode est **consistante** avec l'équation qu'on approche si et seulement si

$$\forall t \in [0, T], \forall y \in \mathbb{A} \quad \Phi(t, y, 0) = f(t, y) .$$

Si ces deux conditions sont respectées (stabilité et consistance) alors la méthode est **convergente**, c'est à dire qu'en faisant tendre Δt vers zéro, la différence entre la solution approchée et la solution exacte $y(t)$ tend également vers zéro aux points de la discrétisation. On a en fait une inégalité de la forme

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} |y^n - y(t_n)| \leq K \Delta t ,$$

où K est une constante dépendant des données, et plus particulièrement de la régularité de f .

La méthode est **précise à l'ordre 2**, c'est à dire qu'une inégalité de la forme

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} |y^n - y(t_n)| \leq K \Delta t^2 ,$$

est vérifiée, lorsqu'on ajoute la condition nécessaire et suffisante suivante,

$$\forall t \in [0, T], \forall y \in \mathbb{A} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(t, y) ,$$

avec

$$f^{(1)}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) .$$

Cette fois, la constante K dépend de la régularité de $f^{(1)}$, ce qui constitue une hypothèse plus restrictive. En posant ensuite, de proche en proche

$$f^{(k+1)}(t, y) = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(t, y) + f(t, y) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial y}(t, y) ,$$

on atteint une précision d'ordre p si et seulement si les conditions suivantes,

$$\forall t \in [0, T], \forall y \in \mathbb{A} \quad \frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t, y, 0) = \frac{1}{k+1} f^{(k)}(t, y)$$

sont vérifiées pour $k = 1, \dots, p-1$. On a alors une inégalité de la forme

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} |y^n - y(t_n)| \leq K \Delta t^p ,$$

où K dépend cette fois de la régularité de $f^{(p)}$.

Dans l'exemple de la boule de pétanque, la solution étant notée v , on avait $f(t, v) = -k\sqrt{v}$, où k est une constante positive ici. La méthode retenue s'écrivait

$$v^{n+1} = v^n - \frac{k \Delta t}{2} \left(\sqrt{v^{n+1}} + \sqrt{v^n} \right) ,$$

ou encore

$$\sqrt{v^{n+1}} = \sqrt{v^n} - \frac{k \Delta t}{2} .$$

La fonction Φ correspondante est

$$\Phi(t, v, h) = \frac{h k^2}{4} - k \sqrt{v} .$$

On a bien

$$\Phi(t, v, 0) = -k \sqrt{v} = f(t, v) ,$$

d'où la consistance. Par ailleurs, $\frac{1}{2} f^{(1)}(t, v) = \frac{k^2}{4}$, et la méthode est bien d'ordre deux, car $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, v, 0) = \frac{k^2}{4}$. Ensuite, les termes $f^{(k)}$ sont tous nuls pour $k \geq 2$, ainsi que les termes $\frac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}$, ce qui signifie que tous les ordres de précision sont atteints, et, effectivement, nous avons bien remarqué que la solution approchée interpolait bien la solution exacte. Par contre, la condition de Lipschitz n'est pas assurée, ni pour f ni pour Φ , ce qui ne nous gêne pas particulièrement ici, s'agissant d'une condition suffisante seulement. En fait, si on effectue un changement de variable de la forme $y = \sqrt{v}$, on retrouve des conditions de Lipschitz sur les nouvelles expressions de f et de Φ .

Considérons maintenant cet autre exemple :

$$y'(t) = -y(t)^2 \quad , \quad y(0) = y_0 \quad \text{avec} \quad y_0 > 0 .$$

On utilise la méthode suivante :

$$y^{n+1} = y^n - \Delta T y^n y^{n+1} ,$$

qui correspond aussi à l'expression

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{1 + \Delta t y^n} .$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq y^n \leq y^0$, et donc le choix de $\mathbb{A} = [0, y_0]$ est possible, et f vérifie bien la condition de Lipschitz sur \mathbb{A} . La fonction Φ est donnée par

$$\Phi(t, y, h) = -\frac{y^2}{1 + hy} ,$$

et on vérifie bien que le critère de stabilité est satisfait, ainsi que le critère de consistance $\Phi(t, y, 0) = -y^2 = f(t, y)$, et donc la convergence est assurée. De plus, on calcule d'une part

$$f^{(1)}(t, y) = f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = (-y^2) (-2y) = 2 y^3 ,$$

et d'autre part,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, h) = \frac{y^3}{(1 + hy)^2} ,$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0) = y^3 = \frac{1}{2} f^{(1)}(t, y) .$$

Cette méthode est d'ordre deux. Il est intéressant de remarquer que la méthode explicite $y^{n+1} = y^n - \Delta t (y^n)^2$ n'assure la positivité que pour $\Delta t \leq \frac{1}{y_0}$, ce qui peut être restrictif si y_0 est grand, et que la méthode implicite $y^{n+1} + \Delta t (y^{n+1})^2 = y^n$ exige une résolution d'équation du second degré, donnant

$$y^{n+1} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\sqrt{1 + 4\Delta t y^n} - 1 \right) ,$$

un peu plus lourde que notre exemple, en n'assurant que l'ordre un en précision. Cet exemple montre qu'un schéma plus précis n'est pas forcément plus complexe.

1.8 Conclusion

De façon générale, on retiendra surtout la complémentarité des deux modèles, mathématique et numérique, dans chacun des exemples proposés, et que le choix du modèle numérique n'est jamais réduit à l'unité, et il est toujours préférable de faire le meilleur choix possible, évidemment, et ceci exige une certaine compétence dans le domaine du calcul scientifique.

On retient aussi que pour les deux premiers exemples d'une part, les deux autres d'autre part, les équations se ressemblent beaucoup, bien que les applications soient très différentes, notamment les échelles de temps ou la signification des variables. Cette situation est fréquente ; pour faire court, on dirait "les équations sont les mêmes, ce sont les applications qui changent..."

Enfin, on a pu constaté qu'en dehors du champ d'application des hypothèses mathématiques (la condition de Lipschitz ici) le comportement pouvait perdre son réalisme, ou plusieurs comportements possibles étaient envisageables. Il sera alors, au niveau du modèle mathématique, imposer une condition supplémentaire pour écarter un comportement irréaliste, une **condition d'entropie** par exemple, qui interdit la croissance gratuite de l'énergie, ou une autre condition pour fixer l'une des diverses solutions réalistes possibles quand une telle situation se présente. Le plus souvent, lorsqu'on sort du champ d'application des mathématiques, on va plutôt observer une perte de la stabilité, et un calcul qui n'est pas mené à son terme.

Chapitre 2

La Modélisation d'une onde

2.1 Qu'est ce qu'une onde ?

Il est bien rare que, dans un traité de physique, on trouve la définition d'une onde, tellement le concept est évident pour ceux qui le pratiquent tous les jours. On ne s'attendra pas plus à trouver la définition d'une vache dans un traité d'agronomie...(la recherche internet de "definition of a cow" donne cependant des résultats intéressants, qui n'ont que peu de liens avec l'agronomie..).

L'onde est quelquefois définie comme une perturbation qui transporte une énergie d'un endroit à un autre. Ceci est un peu abstrait, plutôt restrictif car, par exemple, la variable de position ne représente pas toujours l'espace, et exige de se reporter à la définition d'énergie, qui n'est pas évidente à concevoir dans un contexte général (par exemple dans les domaines économiques ou en sciences humaines...). On va préférer se fier à l'idée que l'on s'en fait, par nos propres observations personnelles.

La perception intuitive d'une onde correspond à un profil qui se déplace, ou se propage, en subissant éventuellement une modification continue au cours de son évolution.

Ce déplacement n'a pas lieu systématiquement dans l'espace physique, il peut s'agir d'une évolution sur une grille donnée, représentant des états possibles, comme par exemple un échelle de notations. D'un point de vue mathématique, où les trivialités sont de rigueur, on peut proposer un profil plat, de vitesse nulle, comme premier exemple, complètement dénué d'intérêt...

A partir de cette simple interprétation intuitive, il est possible de modéliser par une équation mathématique la propagation d'une onde. Pour la situer nous utiliserons une **variable de position**, par exemple une variable d'espace, qui sera notée le plus souvent $x \in \mathbb{R}^d$ si d est la dimension de l'espace, et une **variable d'évolution**, par exemple le temps, qui sera notée $t \geq 0$. Les valeurs de t seront appelées des **instants**, par analogie avec le temps, et la différence entre deux instants consécutifs sera appelée une **durée**. De la même façon, les valeurs de x seront appelées des **points** et la différence entre deux points sera appelée une **distance**.

Nous allons commencer par construire cette équation, qui sera appelée **équation d'onde**, puis quelques termes techniques seront introduits, et ensuite plusieurs exemples d'applications seront adaptés.

2.2 L'équation d'onde

On se place en dimension un d'espace, pour l'instant. En un point x et à un instant t , on note $\phi(x, t)$ l'amplitude du profil d'onde. Nous allons comparer les situations consécutives à deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$, avec $\Delta t > 0$. Si la position du profil à l'instant t est x , sa position sera devenue $x + \Delta x$ à l'instant $t + \Delta t$, en tenant compte d'un petit déplacement Δx proportionnel à Δt que l'on représente sous la forme

$$\Delta x = \lambda(x, t, \phi, \dots) \Delta t$$

avec un coefficient $\lambda(x, t, \phi, \dots)$ **réel**, qui a la dimension d'une vitesse. On l'appellera **vitesse caractéristique** de l'onde.

La modification continue éventuelle du profil d'onde pendant la durée Δt est elle aussi proportionnelle à Δt et sera notée $\Delta t S(x, t, \phi, \dots)$. Cette définition intuitive nous conduit à écrire

$$\phi(x, t) = \phi(x + \Delta x, t + \Delta t) + \Delta t S(x, t, \phi, \dots) + \Delta t \omega(\Delta t)$$

où $\omega(\Delta t)$ est un **module de continuité**, c'est à dire une fonction réelle, continue et nulle à l'origine, ainsi $\omega(\Delta t) \rightarrow 0$ si $\Delta t \rightarrow 0$. Compte tenu de la relation précédente, c'est à dire $\Delta x = \lambda(x, t, \phi, \dots) \Delta t$, on peut écrire

$$\phi(x, t) = \phi(x + \lambda(x, t, \phi, \dots)\Delta t, t + \Delta t) + \Delta t S(x, t, \phi, \dots) + \Delta t \omega(\Delta t),$$

et obtenir après un développement limité au premier ordre, quelques simplifications immédiates, puis un passage à la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, et aussi sous réserve de disposer de la régularité suffisante, l'équation suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda(x, t, \phi, \dots) \frac{\partial \phi}{\partial x} + S(x, t, \phi, \dots) = 0.$$

Il s'agit d'une **équation du premier ordre**, puisqu'elle ne fait intervenir que des dérivées premières. La vitesse caractéristique $\lambda(x, t, \phi, \dots)$ doit être réelle. Le terme $S(x, t, \phi, \dots)$ est appelé **terme source**. Cette équation modélise la propagation d'une onde d'amplitude ϕ et est appelée **équation d'onde**.

Les quantités λ et S peuvent dépendre de la position x et de l'instant t , ou de l'amplitude ϕ , ou encore de tout autre paramètre extérieur susceptible d'intervenir. Lorsque la vitesse caractéristique λ dépend effectivement du profil ϕ , c'est à dire lorsque $\frac{\partial \lambda}{\partial \phi} \neq 0$, on dit que l'onde est **vraiment non linéaire**. Dans le cas contraire, pour $\frac{\partial \lambda}{\partial \phi} = 0$, l'onde est dite **linéairement dégénérée**.

2.2.1 L'exemple fondamental : l'équation des ondes

On considère, sur l'axe réel, la translation d'un profil d'une distance $\lambda_0 t$ proportionnelle à t , le temps, pour λ_0 réel donné. Si ce profil est représenté par le graphe d'une fonction donnée $\phi_0(x)$, on obtient à chaque instant t un nouveau profil représenté par

$$\phi(x, t) = \phi_0(x - \lambda_0 t) .$$

Il est immédiat de vérifier, si ϕ_0 est suffisamment régulière, que ϕ est solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 ,$$

et satisfait la condition initiale

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) .$$

En dérivant encore une fois, on obtient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\lambda_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = -\lambda_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = \lambda_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} ,$$

qui exprime que ϕ est une solution de l'**équation des ondes** classique

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \lambda_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 .$$

Il est important de remarquer que λ_0 n'apparaît seulement que dans l'expression λ_0^2 , ce qui signifie qu'on aurait obtenu le même résultat en remplaçant λ_0 par $-\lambda_0$. De fait, un profil déterminé par la fonction

$$\psi(x, t) = \psi_0(x + \lambda_0 t)$$

est solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 ,$$

et de la même équation des ondes que précédemment,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \lambda_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 .$$

Les deux profils ϕ et ψ représentent deux ondes de vitesses opposées. La solution générale de l'équation des ondes est donnée par la **superposition** de ces deux ondes :

$$w(x, t) = \phi_0(x - \lambda_0 t) + \psi_0(x + \lambda_0 t) .$$

On obtient l'expression des profils ϕ_0 et ψ_0 en imposant deux conditions initiales, la première étant

$$w(x, 0) = \phi_0(x) + \psi_0(x) ,$$

et la seconde portant sur la dérivée en temps

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \lambda_0 (\phi_0'(x) - \psi_0'(x)) ,$$

qui exprime la vitesse initiale. En pratique, on se donne un profil initial

$$w(x, 0) = u_0(x) ,$$

et une vitesse initiale

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) ,$$

et on en déduit ϕ_0 et ψ_0 en intégrant respectivement les deux équations

$$\phi_0'(x) = \frac{1}{2} (\lambda_0 u_0'(x) + v_0(x)) , \quad \psi_0'(x) = \frac{1}{2} (\lambda_0 u_0'(x) - v_0(x)) .$$

Il faut retenir que la méthode de séparation des variables, consistant à rechercher une solution de la forme $w(x, t) = u(t)v(x)$ puis à superposer les différentes solutions obtenues, est d'une utilité contestable ici. En effet, compte tenu de ce qui précède, les fonctions u et v devront être telles que $u(t)v(x)$ soit une fonction de $x - \lambda_0 t$ ce qui ne peut être vérifié que par des exponentielles. Le comportement à l'infini pourra alors poser des problèmes insurmontables en général, ce qui imposera des choix exclusifs d'exponentielles bornées, c'est à dire à argument imaginaire pur, et on va ainsi retrouver la transformation de Fourier.

Comme λ_0 est ici une constante, toutes ces ondes sont **linéairement dégénérées**.

2.3 Quelques exemples d'ondes

2.3.1 Un produit financier

On considère un produit financier qui peut être un portefeuille d'actions ou d'obligations ou encore des produits dérivés, dont la valeur est influencée par le marché qui impose un taux de rendement, et par des mouvements de capitaux : achats, ventes, retraits, dépôts, etc... En anglais, on utilise le terme "asset" pour désigner ce type de produits.

La variable de position est ici le taux de rendement du produit, et la variable d'évolution est le temps. La valeur du produit à l'instant t lorsque le taux de rendement est x , est notée $\phi(x, t)$. Entre deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$ le taux de rendement subit une correction $\Delta x = \lambda \Delta t$, et la valeur du produit subit une variation égale à $x\phi(x, t)\Delta t$ en bénéfice ou en perte suivant le signe de x , liée à la variation du marché, augmentée ou diminuée d'éventuelles opérations d'achat ou de

vente dont le bilan pendant la durée Δt est noté $B(x, t, \phi)\Delta t$. Notons que la dépendance de B par rapport à ϕ est naturelle : si ϕ devient nulle, on ne peut plus vendre. On obtient l'équation de bilan suivante

$$\phi(x + \lambda\Delta t, t + \Delta t) = \phi(x, t) (1 + x \Delta t) + B(x, t, \phi) \Delta t + \Delta t \omega(\Delta t)$$

qui conduit à l'équation d'onde suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = x \phi + B(x, t, \phi) \quad (3.1)$$

où le terme source est de la forme $S = -x\phi - B(x, t, \phi)$.

En général le taux de variation, qui correspond ici à la vitesse caractéristique λ , est imposé par le marché et est indépendant de ϕ lorsque le portefeuille reste "modeste". Par contre, de gros mouvements spéculatifs de capitaux peuvent provoquer une variation de λ . On pourra considérer que le modèle est vraiment non linéaire lorsque de tels gros mouvements apparaissent, et qu'il est linéairement dégénéré pour les "petits porteurs".

Le cas du livret de la Caisse d'Épargne (par exemple) rentre également dans ce cadre. Le taux de rémunération x est toujours positif et reste longtemps constant, ce qui se traduit par une vitesse caractéristique λ nulle pendant ces périodes. Lorsque le ministère des finances décide une variation du taux de rémunération x , la vitesse λ subit une variation brutale sur une durée très courte, et on est amené à l'interpréter comme une **impulsion** ou une masse de Dirac, notée δ habituellement. Imaginons qu'un titulaire de livret fasse un mouvement de retrait ou de dépôt exactement à l'instant de la variation du taux de rémunération : le produit $\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}$ se comporte comme le carré d'une masse de Dirac δ . Or l'espace des distributions n'étant pas une algèbre, on n'a pas la faculté d'y effectuer des multiplications, et en particulier de définir δ^2 . En pratique cette éventualité n'apparaît jamais, puisque la modification de λ a lieu à minuit, lorsque les opérations sont bloquées, et qu'il n'est donc pas possible d'effectuer des mouvements de dépôts ou de retraits.

2.3.2 L'âge d'une population

On considère une population donnée, et on note $\phi(x, t)$ le nombre d'individus ayant l'âge x à l'instant t . Ainsi, la variable de position x ne correspond pas ici à une variable d'espace. Dans la plupart des cas, on s'attend à voir chaque individu vieillir à la même vitesse, c'est à dire d'un accroissement d'âge $\Delta x = \Delta t$ pendant une durée Δt . On obtient une vitesse caractéristique $\lambda = 1$, et bien entendu l'onde sera linéairement dégénérée.

Pour prendre en compte la mortalité, on introduit un coefficient $\mu(x)$ qui dépend de façon croissante (en général) de l'âge, et qui va apparaître dans un terme source indiquant que pendant la durée Δt l'effectif de la population d'âge x décroît de $\mu(x) \phi(x, t) \Delta t$. Le bilan donne

$$\phi(x + \Delta x, t + \Delta t) = \phi(x, t) (1 - \mu(x) \Delta t)$$

qui conduit à l'équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu(x) \phi = 0 \quad (3.2)$$

Quelquefois, la vitesse de vieillissement λ n'est pas constante et peut dépendre du temps. Ainsi, pour certaines espèces d'insectes, le processus d'hibernation ralentit de processus de vieillissement, ce qui se traduit par une valeur de $\lambda(t)$ beaucoup plus faible que la normale. Au contraire, pour un parc d'objets fragiles, le passage de l'hiver va rendre les pannes plus fréquentes et donc accélérer le processus de vieillissement. Une dépendance en x n'est pas exclue non plus : une forte canicule peut accélérer le processus de vieillissement des membres les plus âgés d'une population. Le coefficient $\mu(x)$ n'est pas toujours croissant ; ainsi, dans un système de proies-prédateurs, les proies les plus faciles sont les plus vulnérables, donc souvent les plus jeunes et les plus vieux. Ce coefficient peut aussi dépendre du temps : par exemple la mortalité d'une population de truites n'est pas la même avant ou après l'ouverture de la pêche. L'équation d'onde précédente se généralise ainsi en

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu(x, t) \phi = 0 .$$

On peut envisager également de ne plus considérer la population d'un point de vue global, mais aussi de sa localisation dans l'espace, qui peut être d'une, deux ou trois dimensions. La population d'eudémis sur un rang de vigne va par exemple utiliser la dimension un, pour une population humaine sur un territoire, ce sera la dimension deux, et la dimension trois va convenir pour décrire une population de poissons dans un modèle océanique par exemple. On atteint ainsi une dimension "quatre" pour la variable de position ; cette dimension peut encore augmenter si on tient compte d'autres paramètres : le poids , la taille, etc...

2.3.3 Le trafic routier

On considère un cas simple, où tous les véhicules vont dans le même sens (comme sur une rocade par exemple). La variable de position correspond à une variable d'espace, en dimension un bien évidemment, et la variable d'évolution est le temps. La densité du trafic au point x et à l'instant t est représentée par son amplitude $\phi(x, t)$. La vitesse du trafic est notée v et dépend à la fois de la position, du temps et de la densité du trafic. En effet, le trafic ne peut pas d'écouler à la même vitesse lorsque la densité du trafic est faible ou qu'elle est proche du bouchon (représenté par une densité maximale ϕ_b). Sur un axe donné, on note $g(\phi)$ la valeur maximale de la vitesse qu'autorise la densité du trafic ; il s'agit d'une fonction positive ou nulle de la densité, qui devient effectivement nulle lorsque la densité de bouchon ϕ_b est atteinte. Il existe une autre contrainte, qui est la vitesse maximale autorisée, notée v_M , qui peut dépendre de la position x (plus réduite par exemple en agglomération, zone de travaux, etc...) ou du temps t (les feux de circulation ; $v_M = 0$ lorsque le feu est rouge) et on obtient ainsi une borne de la vitesse donnée par :

$$0 \leq v \leq \text{Min}(v_M, g(\phi)) .$$

Le débit ou le flux du trafic est donné par la quantité $m = \phi v$. On peut établir une équation de bilan en considérant un segment de route de longueur Δx centré sur un point x , et sa situation en

deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$. On écrit que le nombre de véhicules présents à l'instant $t + \Delta t$ dans ce segment est égal au nombre de véhicules présents à l'instant t dans ce même segment, diminué du nombre de véhicule qui en sont sortis, et augmenté de ceux qui y sont rentrés, en provenance d'un segment analogue centré sur un point $x - \Delta x$. Ce bilan donne

$$\phi(x, t + \Delta t) \Delta x = \phi(x, t) \Delta x - \phi(x, t) v(x, t) \Delta t + \phi(x - \Delta x, t) v(x - \Delta x, t) \Delta t + \dots$$

En effet la sortie des véhicules du segment correspond à une partie de ce segment de longueur $v(x, t) \Delta t$ pendant la durée Δt . Il en va de même du côté de l'entrée. Les "..." symbolisent d'éventuels termes d'ordre supérieur en Δx ou Δt qui disparaîtront lors du passage à la limite, pour établir l'équation d'onde. L'équation de bilan peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{\phi(x, t + \Delta t) - \phi(x, t)}{\Delta t} + \frac{\phi(x, t) v(x, t) - \phi(x - \Delta x, t) v(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = 0 + \dots$$

et un passage à la limite lorsque Δx et Δt tendent vers zéro simultanément aboutit à l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\phi v) = 0$$

Cette équation est appelée **équation de transport**, et on la retrouve chaque fois qu'une densité ϕ est transportée par un débit ou un flux noté m . Dans le cas présent, on a $m = \phi v$. De façon générale, elle s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 .$$

Une équation d'onde peut être obtenue en décidant que l'inégalité $v \leq \text{Min}(v_M, g(\phi))$ est réalisée à l'égalité, c'est à dire

$$v = \text{Min}(v_M, g(\phi))$$

ce qui revient à exprimer que le comportement des conducteurs consiste à rouler le plus vite possible.

En posant $f(\phi) = \phi \text{Min}(v_M, g(\phi))$, on obtient une équation de la forme suivante, dite **conservative**,

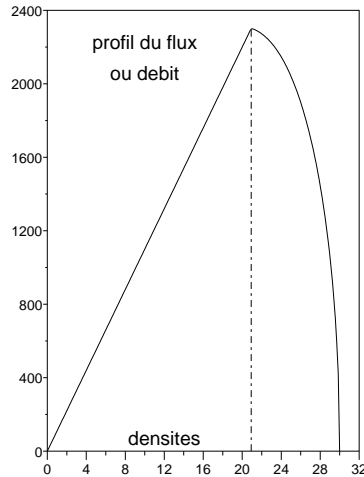
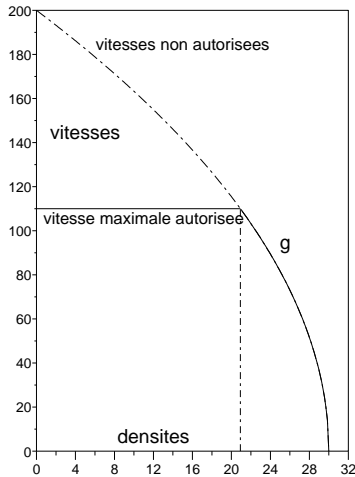
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0$$

qui, lorsque f est dérivable, prend la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + f'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

d'où la vitesse caractéristique

$$\lambda = f'(\phi).$$



La fonction $g(\phi)$ est décroissante et concave ; il existe (en général) une valeur ϕ_0 pour laquelle $g(\phi_0) = v_M$. Ainsi, l'onde est linéairement dégénérée pour $0 \leq \phi < \phi_0$ et vraiment non linéaire ensuite, lorsque $\phi_0 \leq \phi \leq \phi_b$.

La fonction $g(\phi)$ dépend beaucoup du comportement des conducteurs ; dans les pays où le "headway" est respecté (il s'agit de l'espace qu'un conducteur laisse devant lui pour permettre à ceux qui le doublent de se rabattre ; il n'y a pas de mot correspondant en français...), le graphe de $g(\phi)$ est situé plus bien plus bas que dans les pays où les distances de sécurité ne sont pas respectées. On note que le débit est nul en $\phi = 0$ et en $\phi = \phi_b$, et positif ailleurs, d'où l'existence d'un débit maximal ϕ_* , qui coïncide avec ϕ_0 lorsque $\phi g'(\phi) + g(\phi) < 0$ pour $\phi_0 < \phi < \phi_b$. Notons que la vitesse caractéristique λ est négative sur un voisinage de ϕ_b .

2.3.4 L'équation de Burgers

On considère un écoulement de fluide de vitesse $u(x, t)$ au point $x \in \mathbb{R}$, à l'instant $t > 0$, et on fait l'hypothèse que ce fluide n'est en rien perturbé. La vitesse n'est donc pas modifiée, et entre

deux instants consécutifs, on peut écrire

$$u(x + \Delta x, t + \Delta t) = u(x, t)$$

et comme u correspond effectivement à la vitesse de déplacement, on aura

$$\Delta x = u \Delta t$$

au premier ordre. Le passage à l'équation d'onde correspondante donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

qui est appelée **Equation de Burgers** du premier ordre. Cette onde est **vraiment non linéaire**.

Une remarque importante consiste à faire le parallèle avec l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + f'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 ,$$

que l'on multiplie par $f''(\phi)$, supposée non nulle. On obtient exactement l'équation de Burgers réalisée par $u = f'(\phi)$. On peut en déduire que, tant que la solution est régulière, les solutions explicites de l'équation de Burgers permettent, en inversant l'équation $f'(\phi) = u$, de construire des solutions explicites de l'équation générale en ϕ . Par exemple, comme u représente une vitesse, on constate que

$$u = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

est bien solution de l'équation de Burgers, et donc que des solutions de l'équation générale en ϕ sont obtenues implicitement par l'expression

$$f'(\phi) = \frac{x - x_0}{t - t_0} ,$$

qui se résout de façon univoque quand par exemple f' est monotone, ce qui est bien le cas si f'' est non nulle. On retrouve encore une onde vraiment non linéaire.

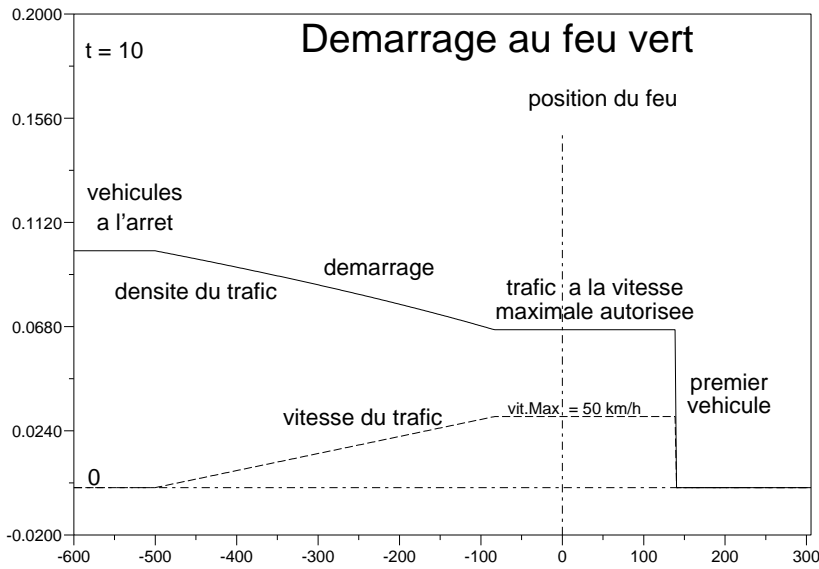
Cette équation de Burgers joue ainsi un rôle central dans l'étude des équations du premier ordre, dans le cas vraiment non linéaire.

Un exemple, retour au trafic routier

On veut simuler le départ au feu tricolore qui vient de passer au vert, dans un secteur urbain limité à $v_M = 50 \text{ kmh}^{-1}$ soit $v_M = 13.8888889 \text{ m s}^{-1}$. On estime la densité du bouchon à $\phi_b = 0.1$, soit un véhicule par 10 mètres de chaussée en moyenne, et on prend la fonction g de la forme

$$g(\phi) = A (\phi_b^2 - \phi^2) ,$$

et en estimant que l'état de la route ne permet qu'une vitesse maximale de 90 km h^{-1} (hors contrainte légale, bien entendu), on obtient $A = 2500$. Le maximum du flux $\phi g(\phi)$ est réalisé pour la densité $\frac{\phi_b}{\sqrt{3}}$, soit 0.057735 véhicules par mètre, environ. On a $g(\phi) = v_M$ pour $\phi = \phi_* = \sqrt{\phi_b^2 - \frac{v_M}{A}}$ soit 0.066666 véhicules par mètre, environ, supérieur à $\frac{\phi_b}{\sqrt{3}}$.



En posant

$$f(\phi) = \phi \text{ Min}(v_M, g(\phi)) ,$$

et en positionnant le feu en $x = 0$ et le passage au vert en $t = 0$, la résolution de l'équation

$$f'(\phi) = \frac{x}{t}$$

conduit à

$$\phi(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > v_M t & \text{(rien n'est encore arrivé)} \\ \phi_* & \text{si } (3v_M - 2A\phi_b^2)t < x \leq v_M t & \text{(arrivée des premiers véhicules)} \\ \sqrt{\frac{\phi_b^2}{3} - \frac{x}{3At}} & \text{si } -2A\phi_b^2 t < x \leq (3v_M - 2A\phi_b^2)t & \text{(onde de démarrage)} \\ \phi_b & \text{si } x \leq -2A\phi_b^2 t & \text{(véhicules encore en attente)} \end{cases}$$

Cependant, ce modèle n'est pas réaliste, puisqu'il admet implicitement qu'on puisse passer instantanément de la vitesse zéro à la vitesse v_M , y compris les camions... ceci n'est possible que pour un véhicule sans masse, qui pourrait être soumis à une accélération impulsionnelle. Les temps de reprise des moteurs et les temps de réaction des conducteurs font qu'un front de démarrage moins raide va apparaître en réalité. Par contre, l'onde de démarrage qui remonte la file de véhicules en attente est de profil réaliste ; sa vitesse de 50 m s^{-1} soit 180 km h^{-1} est cependant bien exagérée. On verra par la suite comment mieux décrire le comportement des conducteurs, ce qui aura pour effet d'introduire plus d'inertie dans le modèle, et rectifier ces imperfections.

2.4 Les caractéristiques

L'expression $\Delta x = \lambda(x, t, \phi, \dots) \Delta t$ conduit naturellement à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\phi, x, t, \dots),$$

que nous appellerons **équation caractéristique**, et qui correspond à une courbe particulière du plan (x, t) , appelé le **plan physique**. En effet, en se restreignant à cette courbe, c'est à dire en prenant en compte la quantité $\phi(x(t), t)$ le long de cette courbe, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t), t) + S(\phi(x(t), t), x(t), t) = 0,$$

qui exprime que $\phi(x(t), t)$ ne varie qu'en fonction du terme source, et en particulier reste constante le long de cette courbe lorsque $S \equiv 0$, c'est à dire dans le cas homogène. Cette courbe est appelée **courbe caractéristique**. Elle permet souvent de construire explicitement des solutions. On peut l'interpréter comme la **trajectoire** d'une particule dont le mouvement serait contrôlé par l'équation $x'(t) = \lambda$. La donnée des deux courbes précédentes constitue le **système caractéristique**.

Reprenons l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

les caractéristiques doivent vérifier le système caractéristique, c'est à dire ici,

$$\frac{d}{dt} x(t) = u(x(t), t) \quad ; \quad \frac{d}{dt} u(x(t), t) = 0.$$

On constate que $u(x(t), t)$ reste constant le long des caractéristiques, et comme de plus il s'agit aussi de la pente de ces caractéristiques, on aboutit à la conclusion : "**les caractéristiques sont des droites**". Ainsi, en attribuant une valeur initiale, en $t = 0$, notée $u_0(x_0)$, en un point x_0 , on obtient la caractéristique d'équation

$$x = x_0 + u_0(x_0) t .$$

Les données $u_0(x_0)$ en chaque point x_0 constituent une fonction u_0 définie sur \mathbb{R} , qu'on appellera la **donnée initiale** ou encore la **condition initiale**.

Pour construire la solution en un point (x, t) de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, c'est à dire pour obtenir la valeur de $u(x, t)$, il nous faut rechercher un point x_0 tel que

$$u(x, t) = u_0(x_0) ,$$

et ce point doit aussi satisfaire $x = x_0 + u_0(x_0) t$, c'est à dire être le point de départ de la caractéristique, pour $t = 0$. En éliminant x_0 on obtient la condition implicite

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t) t) \tag{4.1}$$

qui est aussi appelée **équation caractéristique**. On observe que les caractéristiques issues de l'origine (en $x_0 = 0$) sont de la forme

$$u(x, t) = \frac{x}{t} \tag{4.2}$$

et cette remarque a déjà été notée lors de l'étude de l'équation de Burgers, elle permet de construire aisément des solutions explicites, et elle sera encore bien utile dans la suite.

Dans le cas plus général de l'équation $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(\phi)) = 0$, c'est à dire

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + f'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 ,$$

qui se réduit à l'équation de Burgers lorsque $u = f(\phi)$, les équations caractéristiques deviennent ici

$$\frac{d}{dt} x(t) = f'(\phi(x(t), t)) \quad ; \quad \frac{d}{dt} \phi(x(t), t) = 0$$

et en notant ϕ_0 une donnée initiale on obtient l'équation caractéristique suivante,

$$\phi(x, t) = \phi_0(x - f'(\phi(x, t)) t)$$

qui est implicite en $\phi(x, t)$. Sa résolution permet de retrouver des solutions explicites en $\phi(x, t)$. On dérive maintenant cette expression par rapport à x , pour obtenir

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi'_0(\xi)}{1 + t f''(\phi) \phi'_0(\xi)},$$

où on a posé, pour simplifier, $\xi = x - f'(\phi(x, t)) t$, ce qui permet de constater qu'en dehors des deux cas suivants :

ϕ_0 croissante, f convexe

ϕ_0 décroissante, f concave

le dénominateur risque de s'annuler pour une valeur positive de t . Dans un tel cas le terme $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ devient de plus en plus grand localement, et ce raidissement va se traduire finalement par une discontinuité, qui est couramment appelée une **onde de choc**. Une telle onde est un lieu de rencontre des caractéristiques, ce qui correspond effectivement à une ambiguïté, chaque caractéristique apportant une valeur différente de la solution. Une rencontre de caractéristiques ne peut apparaître que dans le cas d'une onde vraiment non linéaire; elle est impossible dans le cas linéairement dégénéré.

2.5 Les champs conservatifs et les chocs

Lorsque les caractéristiques se rencontrent, il est indispensable de caractériser aussi ce lieu de rencontre, de façon à déterminer les secteurs d'influence des différents champs de caractéristiques. La figure ci dessous correspond à une équation d'onde vraiment non linéaire et homogène, les caractéristiques étant alors nécessairement des droites issues de l'axe des x , c'est à dire $t = 0$. Il s'agit de l'équation de Burgers, avec pour condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et une rencontre de caractéristiques a effectivement lieu le long d'une courbe issue du point de discontinuité initial, en $x = 1$, dont l'équation est $x = \sqrt{1+t}$, par la caractérisation que l'on se propose de construire.

On commence par introduire un espace B_0 puis la notion de **champ conservatif**.

Définition 2.5.1 On note B_0 l'espace vectoriel constitué des fonctions bornées sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}$, continues sauf le long d'un nombre fini ou dénombrable d'arcs de courbe réguliers.

Cet espace décrit le type de régularité attendue : la solution d'une équation d'onde est continûment différentiable, sauf le long des trajectoires des chocs, qui correspondent effectivement à des discontinuités.

Définition 2.5.2 Soit $U = (q, m)$ une application définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 et S une fonction localement intégrable sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que $U \in B_0^2$ est un **champ conservatif de source S** lorsque pour tout ouvert connexe A , de frontière Γ_A régulière, dont la normale unitaire extérieure est notée n_A , on a

$$\int_{\Gamma_A} U \cdot n_A \, d\sigma = \int_A S \, dxdt .$$

Si $S = 0$, il est appelé **champ conservatif homogène**.

Nous avons la propriété essentielle suivante.

Théorème 2.5.3 Si $U = (q, m)$, un champ conservatif de source S sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, est de classe C^1 ($]0, +\infty[\times \mathbb{R}$)²) ses composantes vérifient l'équation d'onde

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = S .$$

Remarque : dans le cas d'un champ conservatif homogène, la composante q peut être interprétée comme une **densité** transportée par le **flux** m . L'équation d'onde précédente est alors appelée **équation de transport**.

Démonstration : On utilise la formule de Green Riemann sur un ouvert A quelconque, c'est à dire

$$\int_{\Gamma_A} U \cdot n_A \, d\sigma = \int_A \operatorname{div}(U) \, dxdt = \int_A \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} \right) \, dxdt .$$

On obtient que sur tout ouvert A l'intégrale

$$\int_A \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} - S \right) \, dxdt = 0 ,$$

et comme l'expression intégrée est continue, elle est nécessairement nulle, d'où le résultat.

Théorème 2.5.4 Soit U un champ conservatif de source S défini sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, et Σ un arc de classe C^1 dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, dont la normale unitaire est notée ν . On suppose U continu sauf sur Σ . Alors la composante normale de U , c'est à dire $U \cdot \nu$, est continue le long de Σ .

Démonstration. Soit (x, t) un point de Σ et $\epsilon > 0$ tel que le disque $D(x, t; \epsilon)$ de centre (x, t) et de rayon ϵ soit inclus dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. On note Γ le cercle de centre (x, t) et de rayon ϵ , c'est à dire la frontière de $D(x, t; \epsilon)$, et n sa normale unitaire extérieure. L'arc Σ sépare $D(x, t; \epsilon)$ en deux parties notées A_1 et A_2 , dont les frontières respectives sont notées Γ_1 et Γ_2 , de normales unitaires extérieures respectives ν_1 et ν_2 . On notera U_1 la restriction de U à A_1 , puis U_2 la restriction de U à A_2 . On oriente cette construction de telle façon que $\nu_2 = \nu$ le long de Σ .

Comme U est un champ conservatif de source S , on a les trois relations

$$\int_{\Gamma} U \cdot n \, d\sigma = \int \int_{D(x, t; \epsilon)} S \, dxdt ,$$

$$\int_{\Gamma_1} U_1 \cdot \nu_1 \, d\sigma = \int \int_{A_1} S \, dxdt \quad ,$$

$$\int_{\Gamma_2} U_2 \cdot \nu_2 \, d\sigma = \int \int_{A_2} S \, dxdt \quad .$$

Or

$$\int \int_{D(x,t;\epsilon)} S \, dxdt = \int \int_{A_1} S \, dxdt + \int \int_{A_2} S \, dxdt \quad ,$$

et en notant $\Sigma_\epsilon = D(x, t; \epsilon) \cap \Sigma$, on remarque que

$$\int_{\Gamma} U \cdot n \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} U_1 \cdot \nu_1 \, d\sigma + \int_{\Gamma_2} U_2 \cdot \nu_2 \, d\sigma - \int_{\Sigma_\epsilon} (U_1 \cdot \nu_1 + U_2 \cdot \nu_2) \, d\sigma \quad .$$

On en déduit pour tout ϵ assez petit,

$$\int_{\Sigma_\epsilon} (U_1 \cdot \nu_1 + U_2 \cdot \nu_2) \, d\sigma = 0 \quad ,$$

et comme les quantités U_1 , U_2 , ν_1 et ν_2 sont continues, il vient, au point (x, t) ,

$$U_1 \cdot \nu_1 + U_2 \cdot \nu_2 = 0 \quad .$$

Par ailleurs, les normales ν_1 et ν_2 sont colinéaires et de signe opposé, c'est à dire que $\nu_1 + \nu_2 = 0$ sur Σ_ϵ . Comme on a pris $\nu_2 = \nu$, on a aussi $\nu_1 = -\nu$, d'où l'équation

$$(U_2 - U_1) \cdot \nu = 0 \quad ,$$

en tout point de Σ , d'où le résultat.

Ce théorème peut aussi s'exprimer ainsi : "**la composante normale d'un champ conservatif est continue le long de tout arc de courbe du plan**". Autrement dit, seule la composante tangentielle est éventuellement discontinue. Ce résultat va nous permettre de caractériser les trajectoires des chocs.

Corollaire 2.5.5 *Dans les conditions du théorème précédent, en notant $U = (q, m)$ puis en supposant que l'arc Σ peut être représenté par une équation de la forme $x = x(t)$, on obtient la*
Relation de Rankine-Hugoniot

$$x'(t) (q_2 - q_1) = m_2 - m_1.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que ν est colinéaire au vecteur $(x'(t), -1)$, d'où, en notations matricielles

$$\begin{pmatrix} q_2 - q_1 \\ m_2 - m_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ -1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

c'est à dire la relation recherchée.

2.5.1 Exemples, pour l'équation de Burgers

On veut résoudre la problème suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

On recherche en fait un champ conservatif de composantes $q = u$ et $m = \frac{u^2}{2}$. Les caractéristiques vont propager les valeurs $(q_1, m_1) = (1, \frac{1}{2})$ en provenance des $x < 0$ à la vitesse $u = 1$, et les valeurs $(q_2, m_2) = (0, 0)$ à la vitesse $u = 0$. Il y a inévitablement rencontre des deux champs de caractéristiques le long d'une courbe d'équation $x = x(t)$, issue de $x = 0$, telle que la relation de Rankine Hugoniot soit satisfaite, c'est à dire ici,

$$x'(t) (0 - 1) = \left(0 - \frac{1}{2}\right) ,$$

d'où

$$x'(t) = \frac{1}{2} , \quad x(0) = 0 ,$$

et donc

$$x(t) = \frac{t}{2} .$$

La trajectoire du choc est une droite issue de l'origine et de vitesse $\frac{1}{2}$. La solution de notre problème est maintenant bien déterminée; elle est donnée par

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{t}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{t}{2} \end{cases} .$$

La trajectoire n'est pas toujours une droite. Reprenons l'équation de Burgers, avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases} .$$

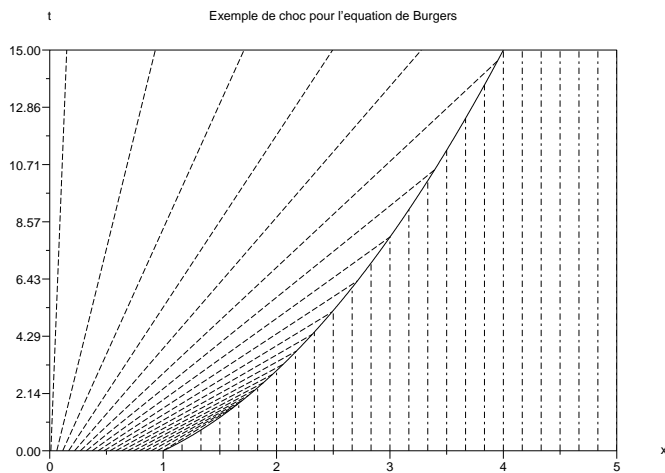
Les caractéristiques ont pour équations

$$x' = u , \quad u' = 0 ,$$

d'où l'expression de la solution suivante :

$$u = 0 \text{ le long des caractéristiques issues de } x < 0 \text{ ou } x > 1 ,$$

$$u = \frac{x}{1+t} \text{ le long des caractéristiques issues de } x \in]0, 1[.$$



Il y a rencontre des champs caractéristiques issus des $x \in]0, 1[$ et des $x > 1$. La relation de Rankine Hugoniot donne ici

$$x'(t) \left(0 - \frac{x}{1+t} \right) = \left(0 - \frac{x^2}{2(1+t)^2} \right)$$

d'où

$$x'(t) = \frac{x(t)}{2(1+t)} , \quad x(0) = 1 .$$

L'intégration de cette équation différentielle est immédiate et donne la trajectoire de choc

$$x(t) = \sqrt{1+t}.$$

On obtient la solution

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > \sqrt{1+t} \\ \frac{x}{1+t} & \text{si } 0 \leq x < \sqrt{1+t} \end{cases}.$$

Cette solution est représentée dans la figure précédente.

Remarque 2.5.6 De façon générale, pour l'équation de Burgers, on a

$$x'(t) = \frac{m_2 - m_1}{q_2 - q_1} = \frac{\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 + u_1}{2},$$

qui exprime que la vitesse du choc est la moyenne arithmétique entre les vitesses des caractéristiques de part et d'autre du choc.

Pour une équation plus générale de la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0,$$

on obtient, puisque $q = \phi$ et $m = f(\phi)$,

$$x'(t) = \frac{f(\phi_2) - f(\phi_1)}{\phi_2 - \phi_1} = f'(\theta), \quad \text{avec } \theta \text{ entre } \phi_1 \text{ et } \phi_2.$$

Il s'agit encore d'une moyenne, pondérée par la fonction de flux.

2.5.2 Caractérisation des chocs : la condition d'entropie

Nous avons observé l'apparition d'un choc lorsqu'il y avait rencontre de caractéristiques, et nous avons ensuite construit une caractérisation de la trajectoire de ce choc, à savoir la condition de Rankine Hugoniot. Cependant, cette condition peut aussi s'adapter à d'autres chocs qui ne correspondent pas à des rencontres de caractéristiques. Ces chocs ne sont pas attendus, ils n'ont pas de signification physique et il devient nécessaire de disposer d'un nouveau critère qui va sélectionner les "bons chocs", c'est à dire les chocs physiquement compatibles.

Par exemple, toujours pour l'équation de Burgers, avec maintenant le donnée initiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

on observe que les deux solutions (différentes!) suivantes sont possibles :

$$u_1(x, t) = u(x, 0) ,$$

et

$$u_2(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -t \\ \frac{x}{t} & \text{si } -t \leq x \leq t \\ 1 & \text{si } x > t \end{cases} .$$

Elles correspondent en effet toutes les deux à des champs conservatifs. La solution u_2 est continue, tandis que la solution u_1 présente un choc stationnaire, c'est à dire de vitesse nulle, de trajectoire $x = 0$, qui est parfaitement compatible avec la condition de Rankine Hugoniot. En effet on a bien $u_1 = -1$ et $u_2 = 1$, donc $\frac{u_1+u_2}{2} = 0$, qui exprime que le choc est bien de vitesse nulle, et ensuite, en intégrant $x'(t) = 0$ à partir de $x = 0$ si $t = 0$, on retrouve bien la trajectoire $x = 0$. Cependant, cette trajectoire ne correspond pas du tout à un lieu de rencontre de caractéristiques issues des données initiales.

Pour assurer qu'une rencontre de caractéristiques issues de la donnée initiale a bien lieu, il est nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire appelée **condition d'entropie** parce qu'elle impose physiquement qu'aucune création d'énergie ne peut apparaître spontanément. Notons $\phi(x - 0, t)$ la valeur de ϕ à gauche d'un point (x, t) d'une trajectoire de choc, et $\phi(x + 0, t)$ la valeur de ϕ à droite de ce point. SI la vitesse des caractéristique est notée $\lambda(\phi)$, il y a rencontre des caractéristique lorsque

$$\lambda(\phi(x - 0, t)) \geq x'(t) \geq \lambda(\phi(x + 0, t)) .$$

Si l'équation d'onde est de la forme suivante, en supposant $f \in C^2(\mathbb{R}^{??})$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) = 0 ,$$

on a $\lambda(\phi) = f'(\phi)$, et la condition exige

$$f'(\phi(x - 0, t)) \geq f'(\phi(x + 0, t)) ,$$

ou encore

$$\frac{f'(\phi(x + 0, t)) - f'(\phi(x - 0, t))}{\phi(x + 0, t) - \phi(x - 0, t)} (\phi(x + 0, t) - \phi(x - 0, t)) \leq 0 .$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une valeur θ comprise entre $\phi(x - 0, t)$ et $\phi(x + 0, t)$ telle que

$$f''(\theta) (\phi(x + 0, t) - \phi(x - 0, t)) \leq 0 .$$

On peut en déduire les résultats suivants :

Proposition 2.5.7 *La condition d'entropie est compatible pour un choc décroissant lorsque f est convexe, ou encore pour un choc croissant lorsque f est concave.*

Remarquons que dans les autres cas, c'est à dire pour une discontinuité croissante avec f convexe, ou encore une discontinuité décroissante avec f concave, il y a toujours une solution régulière possible. En effet, dans ces deux cas, la fonction f' est monotone, donc inversible, et il suffit d'inverser la relation

$$f'(\phi) = \frac{x - x_0}{t} ,$$

où x_0 est le point où se situe la discontinuité. On obtient

$$\phi(x, t) = [f']^{-1} \left(\frac{x - x_0}{t} \right) \quad \text{pour } f'(\phi_1)t < x \leq f'(\phi_2)t ,$$

en notant ϕ_1 et ϕ_2 les valeurs à gauche et à droite de la discontinuité initiale en x_0 .

Une telle onde est souvent appelée **onde de détente**, ou encore **onde de raréfaction**.

Remarque 2.5.8 *Dans le cas général, lorsqu'il n'y a aucune hypothèse de convexité sur f , on peut sélectionner les chocs compatibles avec la condition d'entropie en procédant de la façon suivante, au niveau d'une discontinuité initiale de valeurs ϕ_1 et ϕ_2 à gauche et à droite respectivement.*

Si $\phi_1 < \phi_2$ (discontinuité croissante) on remplace f par son enveloppe convexe sur l'intervalle $[\phi_1, \phi_2]$. Les chocs qui subsistent sont compatibles.

Si $\phi_1 > \phi_2$ (discontinuité décroissante) on remplace f par son enveloppe concave sur l'intervalle $[\phi_2, \phi_1]$. Les chocs qui subsistent sont compatibles.

Notons que les chocs qui subsistent correspondent à des parties rectilignes de l'enveloppe convexe ou concave, suivant le cas.

Remarque 2.5.9 *Dans le cas d'une linéairement dégénérée, il n'y a pas de rencontres de caractéristiques possibles, et bien entendu pas de chocs possibles au sens où ils correspondent à des rencontres de caractéristiques. Il peut cependant y avoir des discontinuités, qui sont transportées par la vitesse $\lambda(x, t)$, qui sont appelées des **discontinuités de contact**.*

2.5.3 L'unicité

Il existe un résultat d'unicité de la solution vérifiant la condition d'entropie, qui est dû à S.N.Kruzkov et O.A.Oleinik, que l'on peut énoncer ainsi :

Théorème 2.5.10 *Si la donnée initiale ϕ_0 est bornée et continue par morceaux, si S vérifie une condition de Lipschitz et si $f \in C^1(\mathbb{R})$, il existe une solution unique de l'équation*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 , \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x)$$

appartenant à l'espace B_0 et compatible avec la condition d'entropie.

Ce théorème est admis, sa démonstration étant relativement technique. Il est important de noter que les fonctions de B_0 sont **bornées**, et l'unicité n'est possible que dans un espace de fonctions bornées comme le montre l'exemple suivant.

On reprend l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

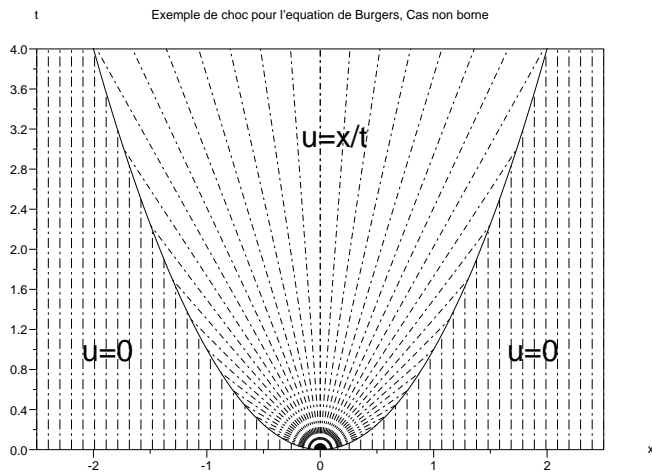
avec la donnée initiale

$$u(x, 0) = 0 .$$

Il existe une solution triviale $u(x, t) = 0$ qui est bien unique compte tenu du théorème précédent. On peut cependant noter que la fonction v définie par

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \sqrt{t} \\ \frac{x}{t} & \text{si } |x| < \sqrt{t} \end{cases} ,$$

est également une solution qui comporte deux discontinuités le long des trajectoires $x = -\sqrt{t}$ et $x = \sqrt{t}$, qui sont toutes les deux décroissantes, donc compatibles avec la condition d'entropie. On observe aussi que cette solution v n'est pas bornée au voisinage de l'origine, lorsque t est petit. Elle n'entre donc pas dans le cadre d'application du théorème, et doit être rejetée.



2.6 La discrétisation des équations d'ondes

Nous ne ferons qu'aborder le sujet, ce problème étant relativement complexe dans un cadre général. Plusieurs techniques peuvent s'adapter suivant les propriétés de l'équation. Une première technique consiste à reprendre la notion de caractéristiques et d'intégrer le système caractéristique à partir de plusieurs (et nombreux) points de la donnée initiale. On reprend alors pour chacun de ces points de départ, une méthode adaptée au système différentiel, comme on l'a fait au chapitre 1. Cette technique n'est cependant pas bien adaptée au cas vraiment non linéaire, lorsqu'il y a rencontre de caractéristiques. Elle est au contraire bien adaptée au cas linéairement dégénéré, parce que de telles rencontres des caractéristiques ne peuvent pas avoir lieu.

2.6.1 Quelques schémas aux différences finies

Dans le cas d'un champ conservatif, les méthodes de **différences finies** sont assez faciles à utiliser. Nous allons proposer deux méthodes, appelées ici des **schémas**. Pour commencer, il nous faut introduire une **discrétisation** des variables de position et d'évolution. On introduit un paramètre réputé petit à l'échelle de la dimension x , noté Δx , positif, puis on pose pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $x_j = j\Delta x$. Bien entendu, en pratique, on se limitera à une partie finie de \mathbb{Z} . De la même façon, on introduit un paramètre de discrétisation pour la variable d'évolution, noté Δt , positif lui aussi, et on pose $t_n = n\Delta t$, pour $n \in \mathbb{N}$, qui se limitera aussi en une partie finie de \mathbb{Z} en pratique.

On considère une équation de la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 ,$$

avec une donnée initiale $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$.

L'approximation de $\phi(x_j, t_n)$ sera notée ϕ_j^n . Les premières valeurs sont obtenues à partir de la donnée initiale, soit par **interpolation**, en posant

$$\phi_j^0 = \phi_0(x_j) ,$$

soit par **projection**, en prenant

$$\phi_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} \phi_0(\xi) d\xi .$$

Un **schéma numérique explicite à $2k + 1$ points** consiste en une ou plusieurs formules permettant de construire les valeurs ϕ_j^{n+1} à partir des valeurs voisines

$$\phi_{j-k}^n, \phi_{j-k+1}^n, \dots, \phi_{j-1}^n, \phi_j^n, \phi_{j+1}^n, \dots, \phi_{j+k-1}^n, \phi_{j+k}^n$$

On se limite en général à de petites valeurs de k , par exemple $k = 1$ ou $k = 2$.

Le **schéma de Lax-Friedrichs** est certainement le plus élémentaire des schémas à 3 points. Les valeurs ϕ_j^n étant toutes connues, on commence par construire les valeurs intermédiaires $\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ par la formule

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_j^n + \phi_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(\phi_{j+1}^n) - f(\phi_j^n)) - \Delta t S\left(\frac{\phi_j^n + \phi_{j+1}^n}{2}\right).$$

Une fois toutes ces valeurs acquises, on reprend la même formule, en indices décalés, pour construire les valeurs ϕ_j^{n+1} , c'est à dire

$$\phi_j^{n+1} = \frac{\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})) - \Delta t S\left(\frac{\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right).$$

Il s'agit d'un schéma à trois points, et de ce fait, il faut éviter que les caractéristiques issues des autres points puissent venir perturber chaque valeur ϕ_j^{n+1} ; il suffit pour cela de choisir Δt suffisamment petit pour qu'une caractéristique ne puisse pas franchir une distance supérieure à la distance Δx pendant la durée Δt . La vitesse étant égale à $f'(\phi)$, il suffit d'exiger pour chaque valeur de t_n atteinte,

$$\sup_{|u| \leq M_n} |f'(u)| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{où } M_n = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\phi_j^n|.$$

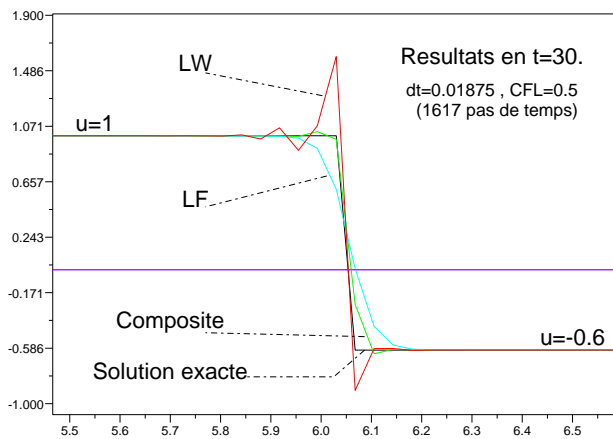
Cette condition est appelée la **condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy** ou plus simplement **condition CFL**. Il s'agit d'une condition suffisante, mais les utilisateurs de ce schémas ont tous fait l'expérience de graves instabilités lorsque cette condition n'est pas respectée. En particulier elle assure la conservation de la positivité dans le cas homogène. Il existe des résultats de convergence de la solution construite par ce schéma vers la solution compatible avec la condition d'entropie, sous la condition CFL, et dans le cadre du théorème de la section précédente. Du point de vue de la précision, ce schéma donne des résultats plutôt médiocres, en particulier au niveau des chocs, qui sont fortement étalés (ou **diffusés**) sur plusieurs points de la discrétisation.

Le **schéma de Lax-Wendroff** permet de gagner en précision, mais quelquefois au détriment de la qualité de la stabilité; en effet on peut voir apparaître des oscillations qui altèrent la qualité du résultat. La première étape est la même que précédemment, pour le schéma de Lax-Friedrichs, pour calculer les valeurs $\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à partir des ϕ_j^n . La seconde étape calcule les valeurs ϕ_j^{n+1} par la formule suivante

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})) - \Delta t S\left(\frac{\phi_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right).$$

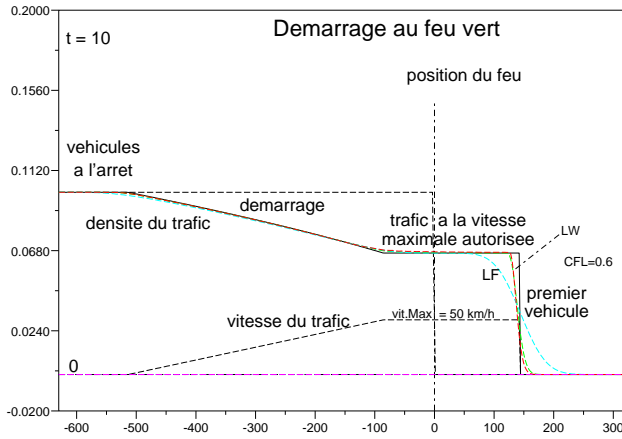
Comme précédemment pour le schéma de Lax-Friedrichs, s'agissant de schémas à trois points, la condition de stabilité CFL est exigée. Ce schéma est précis à l'ordre deux, en ce sens que la dernière formule correspond à une approximation de l'équation à l'ordre deux au point $(x_j, t_n + \frac{\Delta t}{2})$.

Le **schéma composite de B.Wendroff** consiste à utiliser les deux schémas précédents de telles façon que les inconvénients de chacun se corrigent mutuellement en accumulant leurs qualités respectives. Il consiste à reprendre la première étape pour calculer les valeurs $\phi_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ à partir des ϕ_j^n , puis de choisir l'une des deux secondes étapes en fonction d'un dosage simple, par exemple sur 20 pas de temps (pour aller par exemple de t_n à t_{n+20}) faire 19 étapes de Lax-Wendroff, suivie d'une étape de Lax-Friedrichs. Le résultat est surprenant : les effets de diffusion de Lax-Friedrichs et les oscillations de Lax-Wendroff ont tous les deux presque disparu, ce qui est un gain de stabilité, et la qualité de la précision de Lax-Wendroff est maintenue. Du point de vue de la programmation, la modification à apporter à chaque pas de temps est minimale. La figure ci dessous présente un résultat de calcul obtenu pour l'équation de Burgers sur ces trois schémas.



Ces trois schémas ont été appliqués à l'exemple du démarrage au feu vert. On observe dans ce cas que le schéma de Lax-Wendroff et le schéma composite ont un bon comportement, notamment au niveau du premier véhicule. Ce n'est plus du tout le cas pour les résultats obtenus par le schéma de Lax-Friedrichs, où on observe une importante diffusion numérique. Ces résultats ont été calculés avec un CFL égale à 0.6, ce qui donne une CFL effective beaucoup plus petite au niveau du premier véhicule. En effet la CFL est globalement ajustée en fonction de l'onde la plus rapide, qui est ici l'onde de démarrage qui remonte la file de véhicules en attente, ce qui impose une CFL contraignante,

pour laquelle le schéma de Lax-Friedrichs devient moins performant. On peut constater qu'au niveau de la valeur ϕ_* les trois schémas ont donné une valeur correcte. L'onde de démarrage est également bien reproduite.



2.6.2 Une méthode de volumes finis

Une autre technique de discrétisation, la **méthode des volumes finis**, consiste à effectuer un bilan sur chaque élément ou **volume fini** du maillage. Ces éléments sont ici les mailles $M_j =]x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}[$, centrées aux **noeuds** x_j .

L'idée de cette méthode consiste à effectuer un bilan dans chaque maille M_j en tenant compte des échanges avec les deux mailles voisines M_{j-1} et M_{j+1} . Ces échanges ont exprimés par les termes de flux, et la méthode est plutôt adaptée aux équations d'onde correspondant à un champ conservatif. On considère une équations de la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 ,$$

et on évalue les échanges à l'**interface** $x_j + \frac{\Delta x}{2}$ à un instant t_n . Si la vitesse est positive, la propagation se fait depuis M_j vers M_{j+1} , ce qui revient à débiter M_j d'une certaine quantité, proportionnelle à Δt , de la forme $\Delta t f(\phi_j^n)$, pour créditer M_{j+1} de la même quantité. Si au contraire, la vitesse est négative, la propagation se fait depuis M_{j+1} vers M_j , ce qui revient cette fois à créditer M_j d'une certaine quantité, proportionnelle à Δt , de la forme $\Delta t f(\phi_{j+1}^n)$, en débitant d'autant M_{j+1} .

Dans le cas général on note

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = \text{signe}(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) ,$$

puis $I_{j+\frac{1}{2}}^n$ l'intervalle dont les extrémités sont ϕ_j^n et ϕ_{j+1}^n . Précédemment, on a vu qu'on assurait la condition d'entropie en prenant en compte l'enveloppe convexe ou concave sur la discontinuité initiale. On va procéder ici de la même façon. Si la discontinuité est croissante, on a $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = 1$, et on doit prendre l'enveloppe concave de f sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. La partie décroissante, s'il y en a, va provoquer un flux vers M_j et la partie croissante, un flux vers M_{j+1} . Le flux résiduel à l'interface est donc réalisé au minimum de f sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. Si au contraire, la discontinuité est décroissante, on a $\sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = -1$, et on doit prendre l'enveloppe convexe de f sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. Ici encore, la partie décroissante, s'il y en a, va provoquer un flux vers M_j et la partie croissante, un flux vers M_{j+1} . Le flux résiduel à l'interface est donc réalisé au maximum de f sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. On peut réunir ces deux remarques, et les généraliser, en posant

$$A_{j+\frac{1}{2}}^n = \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n \operatorname{Inf}_{k \in I_{j+\frac{1}{2}}^n} f(k) \quad ,$$

qui correspond au flux échangé à l'interface. Le bilan sur la maille M_j entre les instants t_n et $t_n + \Delta t$ s'obtient facilement en écrivant que le champ est conservatif de source S sur $M_j \times]t_n, t_{n+1}[$. On obtient, en utilisant les flux $A_{j+\frac{1}{2}}^n$ obtenus aux interfaces,

$$\Delta x \phi_j^{n+1} = \Delta x \phi_j^n - \Delta t A_{j+\frac{1}{2}}^n + \Delta t A_{j-\frac{1}{2}}^n - \Delta t \Delta x S(\phi_j^n) ,$$

en considérant ϕ_j^{n+1} comme une projection sur M_j à l'instant t_{n+1} dans le calcul de l'intégrale sur le bord de $M_j \times]t_n, t_{n+1}[$, en effectuant une approximation pour évaluer l'intégrale du terme source sur $M_j \times]t_n, t_{n+1}[$. En divisant par Δx on obtient le schéma suivant

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A_{j+\frac{1}{2}}^n - A_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \Delta t S(\phi_j^n)$$

connu sous le nom de **schéma de Godunov**. Ici encore, dans la mesure où on restreint les échanges entre deux mailles voisines au maximum, le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ doit satisfaire à la **condition de Courant-Friedrichs-Lewy**

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \operatorname{Sup}_{\xi \in \mathbb{R}} (|f'(\xi)|) \leq 1 .$$

L'évaluation du flux d'interface $A_{j+\frac{1}{2}}^n$ est en pratique relativement facile : il suffit de tester les deux extrémités de l'intervalle $I_{j+\frac{1}{2}}^n$, c'est à dire ϕ_j^n et ϕ_{j+1}^n , et les extrêmes éventuels de f situés dans cet intervalle $I_{j+\frac{1}{2}}^n$. Si par exemple f est monotone croissante sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$, on aura

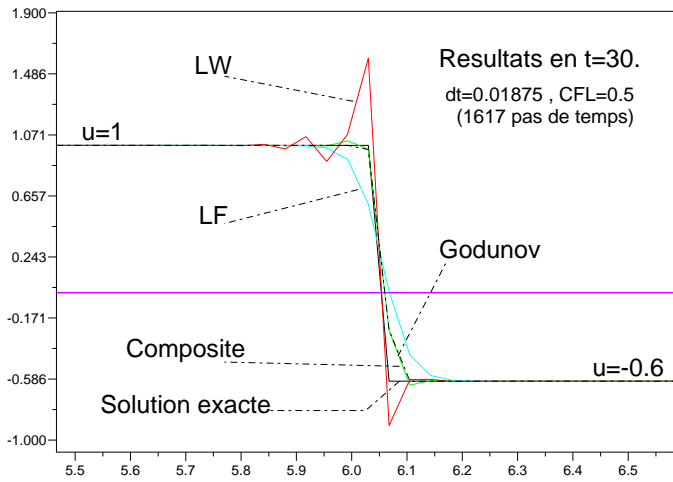
$$f(\phi_j^n) < f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si} \quad \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = 1 ,$$

ou

$$f(\phi_j^n) > f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si } \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = -1 ,$$

si bien que dans chaque cas, le minimum est réalisé en ϕ_j^n . On obtient alors

$$A_{j+\frac{1}{2}}^n = f(\phi_j^n) \quad \text{si } f \text{ est monotone croissante sur } I_{j+\frac{1}{2}}^n.$$



Si f est toujours monotone croissante, le schéma de Godunov se réduit à

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(\phi_j^n) - f(\phi_{j+1}^n)) - \Delta t S(\phi_j^n) ,$$

appelé aussi **schéma décentré**.

Dans le cas contraire, si f est monotone décroissante sur $I_{j+\frac{1}{2}}^n$, on aura

$$f(\phi_j^n) < f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si } \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = -1 ,$$

ou

$$f(\phi_j^n) > f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si } \sigma_{j+\frac{1}{2}}^n = 1 ,$$

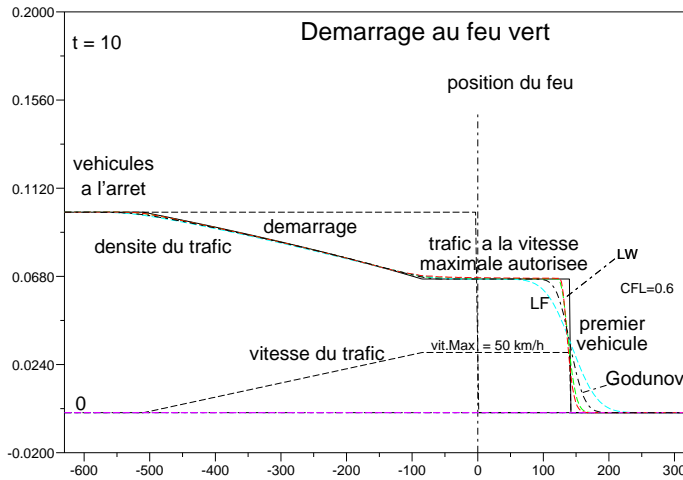
si bien que dans chaque cas, le minimum est réalisé en ϕ_{j+1}^n . On obtient alors

$$A_{j+\frac{1}{2}}^n = f(\phi_{j+1}^n) \quad \text{si } f \text{ est monotone décroissante.}$$

On retrouve un schéma décentré, dans l'autre sens bien sûr,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(\phi_{j+1}^n) - f(\phi_j^n)) - \Delta t S(\phi_j^n) .$$

Nous présentons ici deux résultats obtenus par le schéma de Godunov, dans les mêmes conditions que les résultats obtenus précédemment pour les autres schémas. On observe effectivement les qualités de stabilité du schéma de Godunov, mais sa précision reste d'ordre un. Au niveau des chocs, il améliore nettement la raideur de la pente par rapport au schéma de Lax-Friedrichs, notamment en ce qui concerne la discontinuité de contact pour l'exemple du trafic routier. Il reste cependant bien en retrait de la performance du schéma composite de Wendroff, pour des temps de calcul équivalents.



2.6.3 Un dernier exemple

On considère l'équation de Burgers avec terme source

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = k (u - u_*) \quad ,$$

où $k > 0$ et $u_* \in \mathbb{R}$ sont des constantes données. Cette équation a une propriété intéressante, elle admet une solution non constante qui se propage avec une vitesse constante que nous allons déterminer. Notons A cette vitesse ; la solution recherchée est aussi solution de l'équation linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad .$$

Après soustraction des deux équations, il reste

$$(u - A) \frac{\partial u}{\partial x} = k (u - u_*) \quad ,$$

et en faisant $u = u_*$, il vient nécessairement $A = u_*$ si la solution n'est pas constante ($\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$). On en déduit également

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k \quad .$$

En intégrant, on obtient une solution de la forme

$$u = k x - B(t) \quad ,$$

et on détermine $B(t)$ en dérivant par rapport à t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - B'(t) \quad ,$$

et comme par ailleurs

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - u_* \frac{\partial u}{\partial x} = - u_* k \quad ,$$

on en déduit que la solution est de la forme

$$u(x, t) = k (x - u_* t) + C$$

où C est bien une constante.

On va maintenant construire une solution bornée en s'inspirant de ce calcul. On prendra cette solution égale à u_* en dehors d'un intervalle de longueur $2L$, pour $L > 0$ donné, et constituée

de deux parties de la forme ci dessus, séparées par un choc, qui devra lui aussi se déplacer à la vitesse constante u_* . A l'instant initial, cet intervalle est défini par $[x_0, x_0 + 2L]$, le point x_0 servant simplement à le positionner. On obtient la formulation suivante de la solution :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_* & \text{si } x \leq x_0 + u_*t \\ u_* + k(x - x_0 - u_*t) & \text{si } x_0 + u_*t \leq x < x_0 + u_*t + L \\ u_* + k(x - x_0 - u_*t - 2L) & \text{si } x_0 + u_*t + L < x \leq x_0 + u_*t + 2L \\ u_* & \text{si } x \geq x_0 + u_*t + 2L \end{cases} .$$

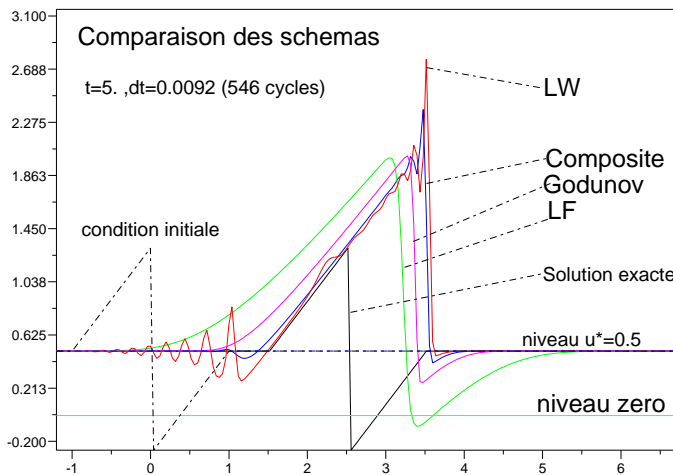
Cette solution présente un choc en $x = x_0 + u_*t + L$, sa valeur à gauche étant $u_1 = u_* + kL$ et sa valeur à droite étant $u_2 = u_* - kL$. La relation de Rankine Hugoniot donne donc

$$x'(t) = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{1}{2} (u_* + kL + u_* - kL) = u_* ,$$

qui est bien la vitesse de choc attendue. De plus ce choc est décroissant, et comme $f(u) = \frac{u^2}{2}$ est convexe, il est bien compatible avec la condition d'entropie.

On se propose maintenant de tester les différents schémas sur cet exemple.

On se propose maintenant de tester les différents schémas sur cet exemple.



La prise en compte de la condition initiale est la même pour tous les schémas; il s'agit d'une simple interpolation qui ne respecte pas rigoureusement la symétrie par rapport à la valeur d'équilibre $u_* = \frac{1}{2}$ ici. Il y a 200 pas d'espace, et la CFL est très petite (au moins au début, puisqu'ensuite elle augmente avec la croissance de la solution approchée). On observe une croissance maintenue de la solution par chacun des schémas, et la solution proposée ci dessus n'est pas du tout approchée comme on aurait pu l'espérer. La solution approchée devient en moyenne supérieure à u_* , et de ce fait le terme source apporte de l'énergie qui ne disparaît pas suffisamment dans le choc comme c'est le cas pour la solution exacte. Ceci illustre la nécessité d'adaptation des schémas aux termes sources, toujours très délicate. En fait, on préconise, pour le maintien des équilibres, une intervention "manuelle" au niveau du schéma, qui le force à conserver son équilibre. Cette intervention utilise des développements mathématiques, bien entendu.

Cet exemple représente dans un modèle simplifié des phénomènes qui apparaissent notamment dans des problèmes de géophysique, comme les cyclones, les tsunamis, le mascaret ou les vagues de surf sur une plage, dont la simulation numérique est effectivement très délicate.

Chapitre 3

Les systèmes à plusieurs ondes

3.1 Les systèmes hyperboliques

On s'intéresse ici à des situations où interviennent plusieurs ondes à la fois. L'état d'une telle situation est décrit par plusieurs paramètres, par exemple la vitesse et la profondeur de l'eau en hydraulique, la densité, la pression et la vitesse dans un gaz, deux ou plusieurs classes différentes dans une population, dans un portefeuille de valeurs, différentes phases chimiques, etc...

Chaque paramètre nécessite qu'il soit décrit par une équation et si N est le nombre de ces paramètres, on s'attend à devoir manipuler un système de N équations. On note u_1, u_2, \dots, u_N ces différents paramètres. Chaque paramètre u_j est donc concerné par une équation de la forme

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^N A_{jk}(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots) \frac{\partial u_k}{\partial x} + S_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots) = 0,$$

où la matrice des coefficients $A_{jk}(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots)$ assure le couplage des équations entre elles. Cette matrice est appelée **matrice de flux**. Les termes S_j constituent d'éventuels termes sources.

On considère une onde particulière, dont on note ϕ son profil. Le paramètre ϕ est bien entendu lié aux différents paramètres u_j et bien souvent il s'agit de l'un d'entre eux. Inversement, au niveau de l'onde, chacun des paramètres u_j peut s'exprimer comme une fonction du profil ϕ , par une relation qu'on écrit

$$u_j = u_j(\phi)$$

étant bien entendu que s'il n'y a pas de dépendance entre u_j et ϕ , on a tout simplement $u'_j(\phi) = 0$. On exige cependant

$$\exists j_0 \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ tel que } u'_{j_0}(\phi) \neq 0,$$

sinon le profil ϕ n'aurait rien à voir avec le système proposé.

Le profil ϕ , correspondant à une onde, doit satisfaire à une équation d'onde, de la forme décrite au Chapitre 2, à savoir

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \lambda(\phi, x, t, \dots) \frac{\partial \phi}{\partial x} + S(\phi, x, t, \dots) = 0 ,$$

où la vitesse caractéristique $\lambda(\phi, x, t, \dots)$ doit absolument être un nombre **réel**. Cette équation d'onde doit aussi être compatible avec le système proposé au départ.

En introduisant les relations $u_j = u_j(\phi)$ dans le système de départ, on obtient pour chaque valeur de j ,

$$u'_j(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\sum_{k=1}^N A_{jk} u'_k(\phi) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + S_j = 0 ,$$

que l'on compare avec l'équation d'onde vérifiée par ϕ , qu'on a préalablement multiplié par $u'_j(\phi)$. Il apparaît une première condition de compatibilité, indépendamment des termes sources :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \sum_{k=1}^N A_{jk} u'_k(\phi) = \lambda u'_j(\phi) .$$

Cette condition impose que λ soit une valeur propre de la matrice de flux (A_{jk}) et le vecteur propre associé est colinéaire au vecteur $(u'_1(\phi), u'_2(\phi), \dots, u'_N(\phi))$ qui est non nul car au moins une de ses composantes $(u'_{j_0}(\phi))$ est non nulle.

Pour que le système proposé décrive correctement la propagation de N ondes on doit donc exiger que les valeurs propres de la matrice de flux (A_{jk}) soient toutes réelles. De plus, afin de pouvoir identifier chaque onde, il est naturel d'exiger que les vitesses caractéristiques soient différentes. Toutefois, on peut accepter les vitesses caractéristiques identiques pour deux ondes différentes, à condition qu'il y ait une certaine indépendance entre elles, ce qu'on traduira par des sous espaces propres de dimension égale à la multiplicité des valeurs propres correspondantes. Les systèmes réalisant cette condition seront appelés des **systèmes strictement hyperboliques**, ce qu'on reprend dans la définition suivante :

Définition 3.1.1 *Un système de la forme*

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^N A_{j,k}(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, \dots) \frac{\partial u_k}{\partial x} + S_j(u_1, u_2, \dots, x, t, \dots) = 0$$

*est dit un **système hyperbolique** lorsque toutes les valeurs propres de la matrice de flux (A_{jk}) sont réelles. Il est dit **strictement hyperbolique** lorsque cette matrice de flux est **diagonalisable**.*

Lorsqu'une valeur propre est multiple, avec un sous espace propre dont la dimension est inférieure à cette multiplicité, on doit se poser la question de l'opportunité de réduire le système d'une équation.

Considérons une nouvelle fois l'onde particulière dont le profil était noté ϕ ci dessus. La vitesse caractéristique associée dépend des différents paramètres u_1, u_2, \dots, u_N , mais reste une fonction de ϕ par l'intermédiaire des fonctions $u_j(\phi)$. On écrit

$$\lambda(\phi, x, t..) = \lambda(u_1(\phi), u_2(\phi), \dots, u_N(\phi), x, t, ..) .$$

L'onde est **vraiment non linéaire** lorsque $\frac{\partial \lambda}{\partial \phi} \neq 0$, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} u'_k(\phi) \neq 0 .$$

Elle est **linéairement dégénérée** dans le cas contraire. En notant $\nabla \lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial u_N} \right)$ et R le vecteur propre associé, que l'on sait colinéaire à $(u'_1, u'_2, \dots, u'_N)$ on a la caractérisation suivante :

Définition 3.1.2 *L'onde est vraiment non linéaire lorsque $\nabla \lambda \cdot R \neq 0$. Elle est au contraire linéairement dégénérée lorsque $\nabla \lambda \cdot R = 0$.*

La présence des termes sources n'influence ni le caractère hyperbolique, ni la nature des ondes (vraiment non linéaire ou linéairement dégénérée). Notons simplement cette relation entre S et chacun des S_j :

$$S_j(u_1(\phi), u_2(\phi), \dots, u_N(\phi), x, t, ..) = u'_j(\phi) S(\phi, x, t, ..)$$

L'un des paramètres u_1, u_2, \dots, u_N est une **variable conservative** lorsque l'équation correspondante

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^N A_{jk}(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, ..) \frac{\partial u_k}{\partial x} + S_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, ..) = 0 ,$$

peut engendrer un champ conservatif de source S_j , c'est à dire qu'il existe un potentiel noté $F_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, ..)$ pour lequel cette équation peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (F_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, ..) + S_j(u_1, u_2, \dots, u_N, x, t, ..)) = 0$$

avec une éventuelle modification du terme source lorsqu'il y a effectivement une dépendance en x . On a nécessairement, dans ce cas

$$A_{jk} = \frac{\partial F_j}{\partial u_k} ,$$

et aussi la possibilité d'écrire la **relation de Rankine Hugoniot** au niveau d'un choc se propageant le long d'une trajectoire $x = x(t)$, c'est à dire

$$x'(t) = \frac{F_j(u_{1,2}, u_{2,2}, \dots, u_{N,2}) - F_j(u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{N,1})}{u_{j,2} - u_{j,1}},$$

en notant respectivement $(u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{N,1})$ et $(u_{1,2}, u_{2,2}, \dots, u_{N,2})$ les valeurs à gauche et à droite du choc.

Le système des N équations est un **système conservatif** lorsque chacune des variables u_j est une variable conservative. Dans ce cas il existe un vecteur de **flux** noté

$$F(u_1, u_2, \dots, u_N) = (F_1(u_1, u_2, \dots, u_N), F_2(u_1, u_2, \dots, u_N), \dots, F_N(u_1, u_2, \dots, u_N))$$

dont la **jacobienne** est la matrice de flux (A_{jk}) ; on l'appelle dans ce cas la **jacobienne de flux**.

Lorsqu'un système est conservatif, les différentes relations induites par la relation de Rankine-Hugoniot doivent correspondre à la même vitesse du choc. Ceci donne $N - 1$ **relations de compatibilité** liant les états situés à gauche et à droite du choc. Ces relations s'écrivent

$$\forall j, k \neq j \quad \frac{F_j(u_{1,2}, \dots, u_{N,2}) - F_j(u_{1,1}, \dots, u_{N,1})}{u_{j,2} - u_{j,1}} = \frac{F_k(u_{1,2}, \dots, u_{N,2}) - F_k(u_{1,1}, \dots, u_{N,1})}{u_{k,2} - u_{k,1}}.$$

Un **problème hyperbolique d'ordre N** consiste en la donnée d'un système hyperbolique de N équations, et d'autant de **conditions initiales**

$$u_1(x, 0) = u_{1,0}(x), \quad u_2(x, 0) = u_{2,0}(x), \quad \dots, \quad u_N(x, 0) = u_{N,0}(x)$$

pour initialiser chacun des paramètres.

3.2 L'exemple de référence : l'équation des ondes

On reprend l'**équation des ondes** sous sa forme habituelle

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

que l'on utilise par exemple pour modéliser les cordes vibrantes, la variable w correspondant alors à un déplacement par rapport à une position au repos. Le paramètre $c > 0$ est une constante représentant la vitesse du son dans le matériau constituant cette corde vibrante. On introduit la vitesse v et une contrainte u définies par

$$v = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad u = - \frac{\partial w}{\partial x}$$

et qui sont liées par la relation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t} ,$$

d'où une première équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 .$$

Une seconde équation s'obtient naturellement en $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ dans l'équation des ondes et s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

Le système constitué de ces deux équations est bien de la forme d'un système hyperbolique et la matrice de flux correspondante est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = -c$ et $\lambda_2 = +c$; ces valeurs propres sont réelles et différentes, et donc le système est bien strictement hyperbolique.

Considérons maintenant l'équation suivante, qui semble proche de l'équation des ondes,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 .$$

En procédant comme ci dessus, on obtiendrait le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

dont la matrice de flux est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres sont ici $-ic$ et ic où i est l'unité imaginaire de \mathbb{C} . Ce système n'est pas hyperbolique.

La **transformation de Fourier** d'une fonction $w \in L^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ est définie par

$$\hat{w}(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{i\tau t + i\xi x} w(x, t) dx dt \quad ,$$

en notant (ξ, τ) la variable de Fourier. Elle a la propriété intéressante de transformer les dérivées en produit. Ainsi, on a immédiatement

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{i\tau t + i\xi x} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) dx dt = -i\xi \hat{w}(\xi, \tau) ,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{i\tau t + i\xi x} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx dt = -i\tau \hat{w}(\xi, \tau) - \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} w(x, 0) dx .$$

En procédant à une transformation de Fourier sur l'équation des ondes, on obtient un coefficient de la forme

$$-\tau^2 + c^2 \xi^2 .$$

Les équations de la forme $\tau^2 - c^2 \xi^2 = \text{Constante}$ correspondent à des hyperboles dans le plan de phase , c'est à dire le plan des (ξ, τ) . La même transformation sur l'autre équation conduit à des coefficients de la forme $-\tau^2 - c^2 \xi^2$ et à des courbes d'équation $\tau^2 + c^2 \xi^2 = \text{Constante}$, qui représentent des ellipses dans ce même plan de phase.

Cette remarque explique la terminologie "**hyperbolique**" pour désigner les systèmes qui nous intéressent ici. Dans le cas de l'autre équation et pour les mêmes raisons, il s'agit d'une équation **elliptique** dont l'analyse est très différente de celle présentée ici.

L'**équation des câbles** constitue une généralisation non linéaire de l'équation des cordes vibrantes. On note encore w le déplacement d'un câble extensible, tendu (comme un fil électrique entre deux poteaux, par exemple) par rapport à une position au repos. Elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) ,$$

où f est une fonction donnée, impaire, strictement croissante et suffisamment régulière. En pratique, f est de la forme

$$f(u) = c u \left(1 - \sqrt{\frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha)^2 + u^2}} \right) ,$$

où $\alpha (> 0)$ correspond à un coefficient de tension du câble : la longueur initiale l_0 est portée à $l_0(1 + \alpha)$ par la tension, et c est un coefficient correspondant aux propriétés mécaniques du câble.

En posant $v = \frac{\partial w}{\partial t}$ et $u = -\frac{\partial w}{\partial x}$ comme ci dessus, on obtient le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 , \quad (2.1)$$

en utilisant le fait que f soit une fonction impaire. Les valeurs propres de la matrice de flux sont

$$\lambda_1 = -\sqrt{f'(u)} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = +\sqrt{f'(u)}$$

et la stricte hyperbolicité exige que f soit une fonction strictement croissante, ce qui est bien le cas ici.

3.3 Les systèmes physiques d'ordre 2

On considère ici un système de deux ondes dont la première équation est une **équation de transport** d'une quantité q interprétée comme une **densité** déplacée par un **flux** m , c'est à dire

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 . \quad (3.1)$$

Le système modélisant deux ondes, la seconde équation est nécessairement de la forme

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial m}{\partial x} - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 ,$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice de flux, indicées de telle façon que l'inégalité $\lambda_1 < \lambda_2$ soit toujours assurée. En effet cette matrice de flux est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} ,$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha} \right) , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha} \right) ,$$

d'où $\beta = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\alpha = -\lambda_1 \lambda_2$.

Ces valeurs propres sont a priori des fonctions de q et m . En posant

$$u(q, m) = \frac{\lambda_1(q, m) + \lambda_2(q, m)}{2} , \quad c(q, m) = \frac{\lambda_2(q, m) - \lambda_1(q, m)}{2} ,$$

on obtient cette autre écriture de la seconde équation :

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 2 u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 .$$

Notons que la matrice de flux n'est pas diagonalisable lorsque la valeur propre est double, ce qui implique que la fonction $c = c(q, m)$ ne peut pas être nulle. On a toujours $c > 0$ du fait du choix des indices assurant $\lambda_1 < \lambda_2$.

Un premier principe physique est celui de l'**invariance par changement de repère galiléen**. Ce principe consiste par exemple à exprimer qu'un observateur "fixe", par exemple un pêcheur assis au bord de l'eau, et un observateur "mobile", par exemple un jogger courant le long de la rive à

une vitesse α constante, voient exactement la même chose en ce qui concerne la profondeur d'eau q , mais des flux différents compte tenu de la différence des vitesses. On effectue le changement de variables suivant

$$y = x + \alpha t \quad , \quad s = t \quad ,$$

avec α constant, pour connaître la perception de l'observateur mobile (le jogger). Pour toute quantité Q , on a, par ce changement de variable,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial s} + \alpha \frac{\partial Q}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad .$$

Le système devient donc

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \alpha \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial y} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial m}{\partial s} - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial q}{\partial y} + (\alpha + \lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial m}{\partial y} = 0 \quad .$$

On observe la modification du flux en $\tilde{m} = m + \alpha q$, sans modification de la profondeur q . Avec ce nouveau flux \tilde{m} , les équations se transforment en

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{m}}{\partial y} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial s} - (\lambda_1 + \alpha)(\lambda_2 + \alpha) \frac{\partial q}{\partial y} + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\alpha) \frac{\partial \tilde{m}}{\partial y} = 0 \quad .$$

On observe que les deux valeurs propres ont été augmentées de la quantité α . Reprenons les quantité u et c définies précédemment par,

$$u = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad , \quad c = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad .$$

Ainsi, par la transformation précédente, la quantité u est augmentée de la valeur α , et la quantité c ne subit aucune variation. On en déduit qu'elle peut ne pas dépendre de m , c'est à dire que dans certains cas, elle vérifiera la condition

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 0 \quad .$$

En effet, on a, pour tout α , lorsque c ne dépend pas de m ,

$$c(q, m + \alpha q) = c(q, m)$$

on encore

$$\frac{c(q, m + \alpha q) - c(q, m)}{\alpha q} = 0 ,$$

et le passage à la limite lorsque α tend vers zéro donne bien la condition $\frac{\partial c}{\partial m} = 0$. Cette condition n'est cependant pas toujours vérifiée par c , par exemple lorsque λ_1 et λ_2 dépendent de m de telle façon que

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial m} \neq \frac{\partial \lambda_1}{\partial m}$$

et dans ce cas,

$$\frac{\partial c}{\partial m} \neq 0 ,$$

mais reste non modifié par le changement de repère. Ceci permet d'introduire la définition suivante.

Définition 3.3.1 *Un système de la forme*

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0$$

est invariant par transformation galiléenne lorsque

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 0 .$$

On définit ensuite un **système physiquement réaliste**, que l'on veut être bien représentatif du caractère physique du modèle envisagé, de la façon suivante.

Définition 3.3.2 *Un système de la forme*

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + 2u \frac{\partial m}{\partial x} + (c^2 - u^2) \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0$$

est un système physiquement réaliste lorsqu'il est invariant par transformation galiléenne, c'est à dire $\frac{\partial c}{\partial m} = 0$, de forme conservative et lorsqu'une densité $q = 0$ correspond toujours à un flux $m = 0$ (condition de flux nul).

Cette définition permet de caractériser une vaste classe de modèles pour lesquels on obtient des résultats dont la réalité physique est très pertinente, comme celui-ci.

Théorème 3.3.3 Dans un système physiquement réaliste, on a nécessairement

$$u = \frac{m}{q} .$$

Inversement, un système conservatif, de la forme précédente, vérifiant la relation $u = \frac{m}{q}$ est un système physiquement réaliste.

Démonstration : Le système admettant une forme conservative en les variables q et m , la seconde équation correspond à un champ conservatif de source S , dont on déduit l'expression

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + S = 0 .$$

En identifiant avec la forme précédente de l'équation, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial q} = c^2 - u^2 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial m} = 2u \quad ,$$

et en calculant de deux façons différentes $\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial m}$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial q} + u \frac{\partial u}{\partial m} = c \frac{\partial c}{\partial m} .$$

Or le système est invariant par transformation galiléenne, donc $\frac{\partial c}{\partial m} = 0$, et il reste

$$\frac{\partial u}{\partial q} + u \frac{\partial u}{\partial m} = 0 \quad ,$$

c'est à dire que u est une solution de l'équation de Burgers avec q comme variable d'évolution et m comme variable de position. De plus, on sait qu'elle est portée par une caractéristique passant par le point $q = 0$, $m = 0$, et donc, d'après le Chapitre 2, cette caractéristique est une droite de pente constante u , c'est à dire la droite $m = qu$, d'où le résultat.

Inversement, si $m = qu$, la condition de flux nul est assurée. Le système étant conservatif, on retrouve l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial q} + u \frac{\partial u}{\partial m} = c \frac{\partial c}{\partial m} .$$

Or $u = \frac{m}{q}$ est solution de l'équation de Burgers, c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial q} + u \frac{\partial u}{\partial m} = 0$, et donc, sachant $c > 0$, on en déduit $\frac{\partial c}{\partial m} = 0$. Le système est bien invariant par transformation galiléenne.

On obtient ainsi l'expression de la quantité u , à savoir

$$u = \frac{m}{q} ,$$

qui correspond effectivement à une vitesse, et plus précisément la vitesse de la matière. Ainsi la variable $m = qu$ correspond à une **quantité de mouvement**, et les deux équations du système

correspondent à la **conservation de la masse** pour la première, la **conservation de la quantité de mouvement** pour la seconde. Il ne reste plus pour définir un modèle physique qu'à donner l'expression de $c = c(q)$, qui correspond également à une vitesse, à savoir la **vitesse du son** ou la **vitesse critique**, selon les applications. Pour cela, il peut être très utile de calculer l'accélération $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$, pour obtenir l'**équation dynamique**

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(q)^2 \frac{\partial q}{\partial x} + S(q, m) = 0 .$$

En introduisant une variable $P = P(q)$ telle que $P'(q) = c(q)^2$, cette équation dynamique prend la forme

$$q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + S(q, m) = 0 .$$

Cette variable P correspond à une **pression**. Elle est déterminée par des mesures expérimentales dans la plupart des cas, ce qui constitue une **loi d'état**.

3.3.1 Le système de Saint-Venant

Il s'agit du modèle le plus utilisé en hydraulique. La quantité q correspond à la profondeur d'eau, et u à sa vitesse, s'agissant d'un modèle physiquement réaliste. On reprend l'équation dynamique précédente, qu'on écrit sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c(q)^2}{q} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{S(q, m)}{q} = 0 .$$

On fait maintenant l'hypothèse suivante : pour $S = 0$, la variation de la vitesse est indépendante de la profondeur. Autrement dit, seule une variation du profil de la surface peut engendrer une mise en vitesse. On en déduit que la quantité

$$\frac{c(q)^2}{q} \text{ DOIT ETRE UNE CONSTANTE.}$$

Cette constante est bien connue, il s'agit de la **constante de gravité** notée habituellement g , dont la valeur en unités MKS est $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ on quand on veut être plus précis, $g = 9.8066 \text{ ms}^{-2}$. On en déduit l'expression de $c(q)$,

$$c(q) = \sqrt{gq} .$$

La variable $c(q)$ est homogène à une vitesse, et on l'appelle la **vitesse critique**. Le nombre

$$F = \frac{|u|}{c(q)}$$

est appelé **nombre de Froude**, et joue un rôle comparable au nombre de Mach en hydrodynamique. L'hypothèse d'indépendance de la profondeur sur la variation de la vitesse correspond effectivement à une limite du modèle, liée à la profondeur de l'eau. Pour une profondeur de 100 mètres, par exemple, une onde va progresser de 10 mètres environ en une seconde, et pendant ce même temps, il y aura eu au moins 8 interactions avec le fond, la vitesse du son dans l'eau étant proche de 1600 mètres par seconde. Le modèle de Saint-Venant est donc tout à fait justifié pour une profondeur de cet ordre. Maintenant, pour une profondeur de 1000 mètres, il faut compter 1.25 seconde pour avoir une seule interaction avec le fond, et pendant ce même temps, une onde aura parcouru 124 mètres en surface. Le modèle n'est plus adapté à ce cas, sauf si la longueur d'onde est suffisante pour que plusieurs dizaines d'aller-retours entre le fond et la surface puissent avoir lieu. Ainsi, des spécialistes des Tsunamis n'hésitent pas à utiliser sur des profondeurs dépassant les 4000 mètres. En fait les ondes de Tsunamis sont de très grande longueur d'onde par rapport à la profondeur, ce qui justifie ce choix.

Le modèle de Saint-Venant est encore appelé "**équations shallow water**", parce qu'il peut aussi être construit à partir d'une hypothèse d'eau "peu profonde", mais cette construction particulière impose des hypothèses très réductrices, qui n'ont pas été faites ici.

3.3.2 Les équations d'Euler en hydrodynamique

On considère ici un gaz, de densité q et bien entendu de vitesse u , s'agissant d'un modèle physiquement réaliste. La pression est obtenue par la loi de Boyle Mariotte pour les gaz parfaits, en situation isentropique, et correspond à la **loi d'état**

$$P(q) = K q^\gamma ,$$

avec γ une constante, dite **constante adiabatique des gaz**. Elle est toujours supérieure à un : $\gamma > 1$. Pour l'atmosphère et des gaz comparables, on prend $\gamma = 1.4$, et quelquefois des valeurs plus proches de $\gamma = 1$ pour des gaz plus lourds.

3.3.3 Un exemple académique

On considère le système suivant, qui n'a pas d'application particulière sauf dans quelques problèmes d'examen (universitaires...),

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 ,$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + 3v \frac{\partial m}{\partial x} + (q - 2v^2) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 ,$$

avec

$$v = \frac{m}{q} .$$

Le paramètre q est supposé positif. Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \frac{3v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + 4q} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{3v}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{v^2 + 4q} \quad ,$$

et donc réelles et distinctes, d'où le système est bien strictement hyperbolique. De plus il est conservatif et vérifie la condition de flux nul puisque $m = vq$ est bien nul si $q = 0$. Cependant, en utilisant les notations

$$u = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad , \quad c = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad ,$$

on obtient

$$u = \frac{3v}{2} = \frac{3m}{2q} \quad , \quad \frac{\partial c}{\partial m} = \frac{m}{2q^2 \sqrt{v^2 + 4q}} \quad .$$

La condition d'invariance par transformation galiléenne ($\frac{\partial c}{\partial m} = 0$) n'est pas vérifiée, et de fait le paramètre u est différent de $v = \frac{m}{q}$, c'est à dire que le flux m ne correspond pas à une quantité de mouvement, et finalement ce système n'est pas du tout physiquement réaliste.

3.3.4 Le trafic routier

On reprend l'exemple traité au niveau d'une équation d'onde, en section 2.3.3, au chapitre 2, c'est à dire l'équation de transport avec le flux $f(\phi) = \phi \text{Min}(v_M, g(\phi))$, où $g(\phi)$ est la vitesse maximale possible en fonction de la densité du trafic routier ϕ et v_M la vitesse maximale autorisée. On a vu que ce modèle n'était pas vraiment réaliste en l'appliquant au démarrage au feu vert, puisqu'il ne tient pas compte de l'inertie des véhicules et de certains conducteurs...

On introduit la vitesse réelle du trafic, noté v , toujours inférieure à $g_M(\phi) \equiv \text{Min}(v_M, g(\phi))$, puis la quantité

$$w = g_M(\phi) - v \quad ,$$

qui exprime la **réserve de vitesse** du trafic; il s'agit d'un paramètre qui reste toujours positif ou nul. Le comportement général des conducteurs consiste à chercher à réduire cette réserve de vitesse. Pendant une durée Δt , le conducteur "moyen" va passer d'une position $x(t)$ à une position $x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x$, avec $\Delta x = v\Delta t$, en cherchant à s'approcher le plus possible de la vitesse maximale $g_M(\phi)$. Ce comportement se traduit par la relation

$$w(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = w(x(t), t) - k w(x(t), t)^\gamma \Delta t + \Delta t \omega(\Delta t; w),$$

où $\omega(\Delta t; w)$ est un module de continuité, $k > 0$ et $\gamma \in]0, 1[$, les paramètres de l'action (freinage ou accélération) qui amène à réduire la réserve de vitesse. Cette relation conduit à l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} = -k \omega^\gamma .$$

En posant $v = g_M(\phi) - w$, on obtient un système constitué d'une équation de transport

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v) = 0 ,$$

et de l'équation dynamique

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v + \phi g'_M(\phi)) \frac{\partial v}{\partial x} = k (g_M(\phi) - v)^\gamma .$$

Ce système admet la matrice de flux

$$\begin{pmatrix} v & \phi \\ 0 & v + \phi g'_M(\phi) \end{pmatrix} ,$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = v + \phi g'_M(\phi) , \quad \lambda_2 = v ,$$

où $g'_M(\phi) < 0$ car g_M est décroissante. En introduisant le flux $m = \phi v$, on obtient le système hyperbolique

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial m}{\partial t} + (2v + \phi g'_M(\phi)) \frac{\partial m}{\partial x} - v (v + \phi g'_M(\phi)) \frac{\partial \phi}{\partial x} = k \phi \left(g_M(\phi) - \frac{m}{\phi} \right) .$$

On obtient ensuite

$$u = \frac{m}{\phi} + \frac{1}{2} \phi g'_M(\phi) , \quad c = \frac{1}{2} \phi g'_M(\phi) ,$$

pour remarquer que

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 0 ,$$

et que le système est invariant par transformation galiléenne et satisfait à la condition de flux nul ($m = v\phi$). Pour $\phi \leq \phi_0$ avec ϕ_0 telle que $v_M = g(\phi_0)$, on a $g'_M(\phi) = 0$, donc $u = \frac{m}{\phi}$, d'où d'après le théorème précédent, le système est conservatif (pour $\phi \leq \phi_0$) et physiquement réaliste. Ce n'est plus le cas lorsque $\phi > \phi_0$, c'est à dire lorsque le trafic commence à se densifier sérieusement, en l'occurrence le cas pour lequel la modélisation peut apporter quelque chose d'utile.

3.3.5 A propos des équations d'ondes (scalaires)

On considère l'équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 ,$$

et introduisons un nouveau paramètre $z(x, t) = x$. On obtient ainsi l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0 ,$$

et comme $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, l'équation en ϕ peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 ,$$

et on a ainsi écrit un système de deux équations dont la matrice de flux est

$$\begin{pmatrix} f'(\phi) & S(\phi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

de valeurs propres *zéro* et $f'(\phi)$. Cette opération amène à constater qu'une équation d'onde non homogène peut être transformée en un système hyperbolique homogène, dont les vitesses caractéristiques sont zéro et celle de l'équation d'onde. Ainsi, un terme source dans une équation induit toujours la vitesse caractéristique "zero".

On peut aussi reprendre l'équation d'onde, et la mettre sous la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + S(\phi) \left(\frac{f'(\phi)}{S(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 1 \right) = 0 .$$

On introduit ensuite une fonction θ telle $\theta'(\phi) = \frac{f'(\phi)}{S(\phi)}$ puis on pose $w = \theta(\phi) + x$. Alors w vérifie

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + 1 , \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \theta'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\theta'(\phi) S(\phi) \frac{\partial w}{\partial x} = -f'(\phi) \frac{\partial w}{\partial x} .$$

On a obtenu le système hyperbolique homogène

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + S(\phi) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial w}{\partial t} + f'(\phi) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ,$$

dont la matrice de flux est

$$\begin{pmatrix} 0 & S(\phi) \\ 0 & f'(\phi) \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres en sont encore $f'(\phi)$ et *zéro*. On retrouve cette valeur propre nulle due au terme source.

Une autre opération plus fantaisiste consiste à introduire un paramètre q tel que

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 ,$$

et de reprendre l'équation d'onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\phi) + S(\phi) = 0 .$$

On obtient un autre système hyperbolique dont la matrice de flux est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & f'(\phi) \end{pmatrix} ,$$

avec toujours les mêmes valeurs propres $f'(\phi)$ et *zéro*. Cette fois ci le système n'est pas devenu homogène, mais on a retrouver la forme des systèmes dont la première équation est une équation de transport, de la densité q ici, par le flux $m = \phi$. On obtient

$$u = \frac{1}{2} f'(\phi) , \quad c = \frac{1}{2} |f'(\phi)| , \quad (c = |u|)$$

et donc $\frac{\partial c}{\partial m} \neq 0$. Ce système est conservatif, mais n'est pas invariant par transformation galiléenne et ne respecte pas la condition de flux nul. Il n'est donc pas physiquement réaliste.

Ces différentes manipulations de l'équation d'onde scalaire semblent a priori un peu fantaisistes. Elles peuvent apporter cependant de nouvelles formulations pour lesquelles les conditions de stabilité ou de convergence sont parfois très fortement favorisées et améliorées, lors de traitements numériques des équations notamment.